

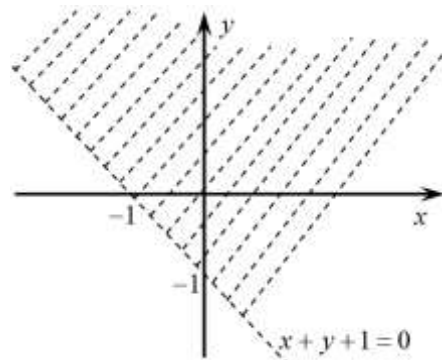
ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД: МЕТОД ОБЛАСТЕЙ

Рассмотрим задачи для решения которых потребуется строить не только графики функций, но и отмечать области удовлетворяющие определенным условиям, как правило, некоторым неравенствам или системам неравенств. Функции $y = f(x)$ удовлетворяют все точки плоскости Oxy принадлежащие графику этой функции. Тогда, очевидно, что все точки, удовлетворяющие неравенству, $y > f(x)$ расположены выше графика функции $y = f(x)$, а все точки, удовлетворяющие неравенству, $y < f(x)$ расположены ниже графика функции $y = f(x)$.

При решении неравенства $f(x; y) \geq 0$ методом областей строят все кривые, на которых $f(x; y) = 0$. Эти кривые разбивают плоскость Oxy на множества, на которых знак функции $f(x; y)$ постоянный. Затем отбираем те подмножества, которые удовлетворяют условию $f(x; y) \geq 0$.

Пример 1. Изобразить все точки плоскости Oxy удовлетворяющие условию $x + y + 1 > 0$.

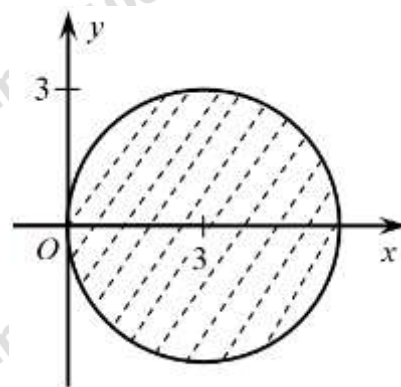
Решение. Графиком функции $x + y + 1 = 0$ является прямая, проходящая через точки $(-1; 0)$ и $(0; -1)$ (см. рисунок). Эта прямая разбивает плоскость Oxy на две «полуплоскости». Чтобы выяснить какая из этих «полуплоскостей» удовлетворяет условию $x + y + 1 > 0$ возьмем точки расположенные выше прямой, например, точку $(0; 0)$ ($0 + 0 + 1 > 0$) и ниже прямой, например, точку $(-1; -1)$ ($-1 - 1 + 1 < 0$). Так как точка $(0; 0)$, расположенная выше прямой, удовлетворяет неравенству $x + y + 1 > 0$, а точка $(-1; -1)$, расположенная ниже прямой не удовлетворяет этому неравенству, то условию $x + y + 1 > 0$ удовлетворяют все точки плоскости Oxy , расположенные выше прямой $x + y + 1 = 0$. На рисунке это заштрихованная область.



Пример 2. Изобразить все точки плоскости Oxy удовлетворяющие условию $x^2 + y^2 - 6x \leq 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $x^2 + y^2 - 6x = 0$. После выделения полного квадрата в левой части функция примет вид: $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ – это уравнение окружности с центром в точке $(3; 0)$ и радиусом $R = 3$. Эта окружность разбивает плоскость Oxy на две: одна часть состоит из точек которые находятся внутри окружности, а вторая – вне окружности. Чтобы

выяснить какая часть удовлетворяет условию $x^2 + y^2 - 6x \leq 0$ возьмем точки расположенные внутри окружности, например, $(3;0)$ и снаружи, например, $(0;3)$. Видно, что точка $(3;0)$ удовлетворяет условию $x^2 + y^2 - 6x \leq 0$, а точка $(0;3)$ не удовлетворяет. Следовательно, условию $x^2 + y^2 - 6x \leq 0$ удовлетворяют все точки которые находятся внутри окружности и на самой окружности (на рисунке заштрихованная область).

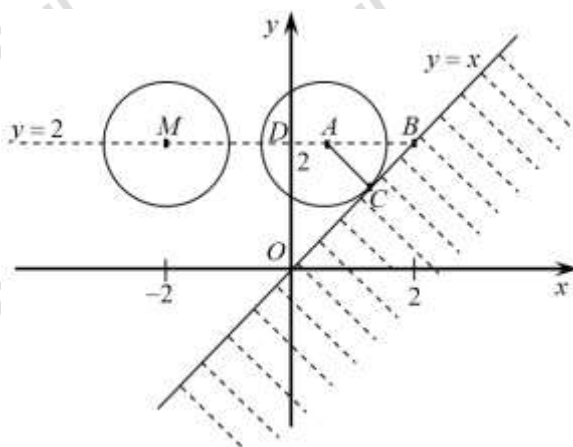


Пример 3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (y-x)((x+2)^2 + (y-2)^2) \leq 0, \\ (x-a)^2 + (y-2)^2 \leq 1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Заметим, что вторая скобка первого неравенства всегда неотрицательна. Поэтому первое неравенство выполнится только в случаях, когда $y-x \leq 0$ и $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 0$. Условию $y-x \leq 0$ удовлетворяют все точки расположенные на прямой $y=x$ и ниже ее, а условию $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 0$ удовлетворяет только точка $M(-2;2)$. Условию $(x-a)^2 + (y-2)^2 \leq 1$ удовлетворяют все точки лежащие на окружности $(x-a)^2 + (y-2)^2 = 1$ и внутри ее. Центр этой окружности находится в точке $(a;2)$ (то есть перемещается по прямой $y=2$) и $R=1$. Система неравенств будет иметь одно решение только в случаях когда точка $M(-2;2)$ находится на окружности или внутри ее и когда окружность касается прямой $y=x$, причем окружность должна оказаться над прямой (на рисунке касание в точке C). Точка $M(-2;2)$ находится на окружности или внутри ее при $a \in [-3; -1]$. Чтобы выяснить при каком значении параметра a окружность будет касаться прямой $y=x$ достаточно найти длину отрезка AD . Так как $AC=R=1$ и $\angle ABC = 45^\circ$, то $AB = \sqrt{2}$ и тогда $AD = DB - AB = 2 - \sqrt{2}$. Таким образом, система неравенств будет иметь одно решение при $a \in [-3; -1] \cup \{2 - \sqrt{2}\}$.



Пример 4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

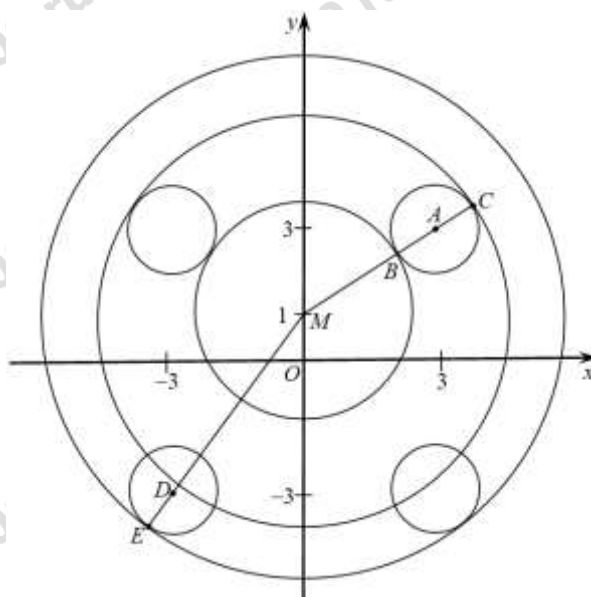
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \leq 0, \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Так как $x^2 = |x|^2$ и $y^2 = |y|^2$, то неравенство системы перепишем в виде: $(|x| - 3)^2 + (|y| - 3)^2 \leq 1$, которое является четным относительно x и y . При $x, y > 0$ последнее неравенство примет вид: $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 \leq 1$, которому удовлетворяют все точки расположенные на окружности и внутри ее с центром в точке $A(3; 3)$ и $R = 1$. За счет четности таких окружностей будет четыре с центрами в точках $(3; 3)$, $(-3; 3)$, $(-3; -3)$, $(3; -3)$.

Уравнение системы запишем в виде: $x^2 + (y - 1)^2 = a^2$ – это множество окружностей с центром в точке $M(0; 1)$ и радиусом $R = |a|$. Исходная система будет иметь решения, если последняя окружность имеет хотя бы одну общую точку с одной из четырех окружностей, соответствующих неравенству.

Определим внешнее касание окружности $x^2 + (y - 1)^2 = a^2$ с окружностями расположенными в первой и второй четвертях. По теореме Пифагора $MA = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, тогда $R = |a| = MB = MA - AB = \sqrt{13} - 1$. Внутреннее касание будет при $R = |a| = MC = MA + AC = \sqrt{13} + 1$. Определим внешнее касание окружности $x^2 + (y - 1)^2 = a^2$ с окружностями расположенными в третьей и четвертой четвертях. По теореме Пифагора $MD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, следовательно, касания будет при $R = |a| = 5 - 1 = 4$. Так как $\sqrt{13} + 1 > 4$, то при $R = |a| = \sqrt{13} + 1$ окружность $x^2 + (y - 1)^2 = a^2$ будет пересекать окружности расположенные в третьей и четвертых четвертях. Если $R = |a| = ME = MD + DE = 5 + 1 = 6$, то окружность $x^2 + (y - 1)^2 = a^2$ будет касаться с окружностями в третьей и четвертой четвертях внутренним образом. Следовательно, при $|a| \in [\sqrt{13} - 1; 6]$ система будет иметь решения. Таким образом, при $a \in [-6; 1 - \sqrt{13}] \cup [\sqrt{13} - 1; 6]$ исходная система имеет решение.



Пример 5 (ЕГЭ 2011). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 - (3a - 2)x + 2a^2 - 2a \leq 0, \\ x^2 + a^2 = 9 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Корнями квадратного трехчлена, стоящего в левой части первого неравенства данной системы, являются числа $x_1 = a$ и $x_2 = 2a - 2$. Поэтому левую часть первого неравенства системы можно разложить на множители, тогда неравенство представится в виде $(x - a)(x - 2a + 2) \leq 0$.

Рассмотрим множество точек плоскости $(a; x)$, в которых левая часть полученного выражения обращается в нуль. Это множество является объединением двух прямых, разбивающих плоскость на четыре области (см. рисунок).

В каждой из этих областей квадратный трехчлен из левой части первого неравенства системы имеет постоянный знак. Области, являющиеся решением первого неравенства, отмечены штриховкой.

Второе уравнение исходной системы определяет окружность радиуса 3 с центром в начале координат. Решениями системы на плоскости $(a; x)$ являются дуги этой окружности, проходящие через заштрихованные области. Следовательно, исходная система имеет решения (пары чисел $(a; x)$) при $a_1 \leq a \leq a_2$ и $a_3 \leq a \leq a_4$, где значения a_1 и a_4 (причем $a_1 < a_4$) являются абсциссами точек пересечения окружности с прямой $x = a$, а значения a_2 и a_3 (причем $a_2 < a_3$) — абсциссами точек пересечения окружности с прямой $x = 2a - 2$. Получаем две системы уравнений

$$\begin{cases} x = a, \\ x^2 + a^2 = 9 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2a - 2, \\ x^2 + a^2 = 9, \end{cases}$$

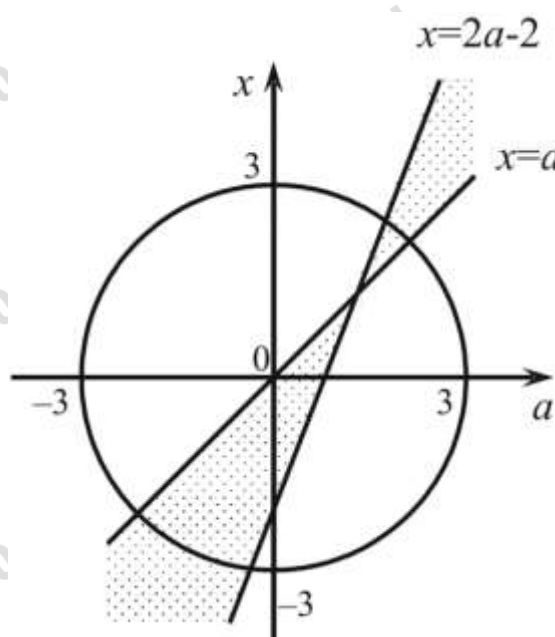
из которых соответственно находим

$$a_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}; \quad a_4 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad a_2 = \frac{4 - \sqrt{41}}{5};$$

$$a_3 = \frac{4 + \sqrt{41}}{5}. \quad \text{Следовательно, исходная}$$

система имеет решения при

$$-\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{4 - \sqrt{41}}{5} \quad \text{и} \quad \frac{4 + \sqrt{41}}{5} \leq a \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$



Задачи этого раздела для самостоятельного решения мы решили не разбивать на несколько уровней сложности и всем им присвоили уровень В.

Уровень В

1В (ЕГЭ 2017). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} |x| + |a| \leq 4, \\ x^2 + 8x < 16a + 48 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-1; 0]$.

2В (ЕГЭ 2017). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.

3В (ЕГЭ 2017). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение
$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}} = 0$$
 имеет ровно один корень на отрезке $[4; 8]$.

4В (ЕГЭ 2017). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение
$$\frac{x^2 - 10x + a^2}{\sqrt{(a-x+8)(x+a-3)}} = 0$$
 имеет ровно один корень на отрезке $[2; 6]$.

5В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} (x-1)(x+2) \leq 0, \\ 8x^2 + 8y^2 - 16a(x-y) + 15a^2 - 48y - 50a + 72 = 0 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

6В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} y(y+1) \leq 0, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6a(x+y) + 5a^2 - 6x + 4a + 3 = 0 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

7В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} (y-2x)(2y-x) \leq 0, \\ \sqrt{(x+a)^2 + (y-a)^2} = \frac{|a+1|}{\sqrt{5}} \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.

8В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} (y+2x)(2y+x) \leq 0, \\ \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} = \frac{|a+1|}{\sqrt{5}} \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.

9В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \leq 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

10В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |3x - y + 2| \leq 12, \\ (x - 3a)^2 + (y + a)^2 = 3a + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

11В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} ((x - 3)^2 + (y - 3)^2 - 1)((x - 1)^2 + y^2) \leq 0, \\ y - 2 = ax \end{cases}$$

не имеет решений.

12В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} ((x - 5)^2 + (y - 3)^2 - 9)((x - 2)^2 + (y + 1)^2) \leq 0, \\ y = ax + a + 3 \end{cases}$$

не имеет решений.

13В (ЕГЭ 2018). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x + 5)^2 + y^2 - a^2) \ln(9 - x^2 - y^2) = 0, \\ ((x + 5)^2 + y^2 - a^2)(x + y - a + 5) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

14В (ЕГЭ 2018). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + 6x) \ln \frac{3x + 4y + a}{20} = 0, \\ (x^2 + y^2 + 6x)(x^2 + y^2 - 12x) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

15В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

16В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (2 - 3a)x + 2a^2 - 2a < 0, \\ ax = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

17В (ЕГЭ 2017). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (a + 7x + 4)(a - 2x + 4) \leq 0, \\ a + 3x \geq x^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

18В (ЕГЭ 2017). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (a + 13x + 9)(a - 3x + 9) \leq 0, \\ a + 7x \geq x^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

19В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства $x^2 + |x + a - 3| + 5 \leq 5x + a$ принадлежит отрезку $[1; 2]$.

20В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства $6x \geq 2x^2 + a + |2x - a - 2| + 2$ принадлежит отрезку $[-1; 0]$.

21В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых существует хотя бы одно число $x \in (1; 2)$, не являющееся решением неравенства $a + \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leq 3x - x^2$.

22В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых существует хотя бы одно число $x \in (-2; -1)$, не являющееся решением неравенства $2x^2 + 6x + a + \sqrt{a^2 + 4ax + 4x^2} \leq 0$.

23В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\arccos(ax - a + 1) \leq \arccos(2x + a - 3)$ имеет хотя бы одно решение.

24В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\arcsin(ax + a + 1) \geq \arcsin(2x + a + 1)$ имеет хотя бы одно решение.

25В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\arcsin(ax + 2a + 1) + \arccos(2x + a + 3) \geq \frac{\pi}{2}$ имеет хотя бы одно решение.

26В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\arcsin(2x + a - 5) + \arccos(ax - 2a + 1) \leq \frac{\pi}{2}$ имеет хотя бы одно решение.

27В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} a \leq \sqrt{25 - x^2}, \\ (4a - 3x)(3a + 4x) \geq 0 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

28В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} a + \sqrt{169 - x^2} \geq 0, \\ (5a - 12x)(12a + 5x) \leq 0 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

29В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств
$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x - 1} \geq a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$
 является отрезок числовой прямой, длина которого равна 2.

30В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств
$$\begin{cases} ax \geq 8, \\ \sqrt{x-4} \geq 2a, \\ 3x \leq 8a + 44 \end{cases}$$
 является отрезок числовой прямой, длина которого равна 4.

31В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств
$$\begin{cases} a \leq 3\log_3 x, \\ ax \geq 9, \\ |x-9| + |x-27| \leq 18 \end{cases}$$
 является отрезок числовой прямой, длина которого равна 15.

32В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств
$$\begin{cases} a \leq \log_3 x, \\ ax \geq 3, \\ |x-9| + |x-27| \leq 18 \end{cases}$$
 является отрезок числовой прямой, длина которого равна 9.

33В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} \frac{(ax-8)(a-\log_2 x)}{x} \leq 0, \\ |x-2| + |x-8| \leq 6 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

34В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} \frac{(ax-4)(a-1-\log_2 x)}{x} \leq 0, \\ |x-1| + |x-4| \leq 3 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

35В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} |x| + 2a \leq 4, \\ \sqrt{|x-1|} \leq a \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

36В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} |x| + a \leq 2, \\ \sqrt{|2x-1|} \leq a \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

37В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств
$$\begin{cases} a + 3x \leq 12, \\ a + 4x \geq x^2, \\ a \leq x \end{cases}$$
 является отрезок числовой прямой, длина которого равна 2.

38В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств
$$\begin{cases} a + 6x \leq 24, \\ a + 8x \geq 2x^2, \\ a \leq 2x \end{cases}$$
 является отрезок числовой прямой, длина которого равна 2.

39В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств
$$\begin{cases} x^2 - 8x + a \leq 0 \\ x^2 - 6x - a \leq 0 \end{cases}$$
 является отрезок числовой прямой, длина которого равна 6.

40В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств
$$\begin{cases} x^2 - 6x + a \leq 0 \\ x^2 - 4x - a \leq 0 \end{cases}$$
 является отрезок числовой прямой, длина которого равна 4.

41В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений неравенства $(x^2 - 4x + a)(a - 4|x| + 9) \leq 0$ является объединение ровно двух непересекающихся промежутков числовой прямой.

42В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений неравенства $(x^2 - 6x + a)(a - 5|x| + 12) \leq 0$ является объединение ровно двух непересекающихся промежутков числовой прямой.

43В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств
$$\begin{cases} 4|x| + |a| \leq 4 \\ x^2 + 2x \leq a + 3 \end{cases}$$
 является отрезок числовой прямой, длина которого равна 1.

44В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений системы неравенств
$$\begin{cases} 2|x| + |a| \leq 4, \\ x^2 + 4x \leq 4a + 12 \end{cases}$$
 является отрезок числовой прямой, длина которого равна 2.

45В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений системы неравенств
$$\begin{cases} a + 2x + 7 \geq x^2, \\ a + 8 \leq 4|x| \end{cases}$$
 состоит из отрезка числовой прямой и не принадлежащей ему точки этой прямой.

46В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений системы неравенств
$$\begin{cases} a + 2x + 4 \geq x^2, \\ a + 5 \leq 4|x| \end{cases}$$
 состоит из отрезка числовой прямой и не принадлежащей ему точки этой прямой.

47В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} |2a - 4x - 3| \geq 9, \\ x^2 + a \leq 4x + 5 \end{cases}$ имеет единственное решение.

48В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} |a - 4x + 5| \geq 18, \\ x^2 + a \leq 8x + 9 \end{cases}$ имеет единственное решение.

49В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} 16y^2 \geq 9x^2, \\ (x - 6a + 1)^2 + y^2 \leq 9a^2 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

50В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} 9y^2 \geq 16x^2, \\ (x - 7a + 4)^2 + y^2 \leq 16a^2 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

51В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет ровно три различных корня.

52В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|4x - a^2| = |x^2 - 4a|$ имеет ровно два различных корня.

53В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(x^2 - 5 + \ln(x - a))^2 = (x^2 - 5)^2 + \ln^2(x - a)$ имеет единственное решение на отрезке $[0; 3]$.

54В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(x^2 - 7 + \ln(x - a))^2 = (x^2 - 7)^2 + \ln^2(x - a)$ имеет единственное решение на отрезке $[0; 3]$.

55В (ЕГЭ 2022). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + a^2 + x - 7a = |7x + a|$ имеет более двух различных решений.

56В (ЕГЭ 2022). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + a^2 - 2x - 6a = |6x - 2a|$ имеет два различных решения.

57В (ЕГЭ 2022). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x^2 + a^2 - 6x - 4a| = 2x + 2a$ имеет два различных решения.

58В (ЕГЭ 2022). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x^2 + a^2 - 6x - 4a| = 2x + 2a$ имеет четыре различных решения.

59В (ЕГЭ 2022). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2 - 9x^2 + 18|x| - 9 = 0$ имеет два различных решения.

ОТВЕТЫ

- 1B.** $(8-8\sqrt{2}; 4]$. **2B.** $\left[\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$. **3B.** $\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2}; -3\right) \cup \left\{-\frac{5}{2}\right\} \cup (-2; 1]$. **4B.**
 $\{-5\} \cup \left(-2\sqrt{6}; -\frac{3+\sqrt{41}}{2}\right) \cup [4; 2\sqrt{6}) \cup \{5\}$. **5B.** $-\frac{16}{7}; -2; 0; 2$. **6B.** $0; 1$. **7B.** $-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}$.
8B. $-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}$. **9B.** $-2; 3$. **10B.** $-\frac{4}{3}; 2$. **11B.** $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup \left(\frac{3}{4}; \infty\right)$. **12B.**
 $(-\infty; -\frac{4}{3}) \cup \left(-\frac{4}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty\right)$. **13B.** $(1; 2] \cup [8; 9)$. **14B.** $(-28; -6]$. **15B.**
 $(-\sqrt{2}; -\frac{16}{17}) \cup (0; \sqrt{2})$. **16B.** $\left(-1; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$. **17B.** $\left[-\frac{9}{4}; 4\right] \cup \{10\}$. **18B.**
 $\left[-\frac{49}{4}; 18\right] \cup \{30\}$. **19B.** $[0; \infty)$. **20B.** $(-\infty; -2]$. **21B.** $(1; 5; \infty)$. **22B.** $(3; \infty)$. **23B.**
 $[-2; 2]$. **24B.** $[-2; 2]$. **25B.** $[-2; 2]$. **26B.** $[-2; 2]$. **27B.** $(-\infty; 5]$. **28B.** $\left[-12; \frac{156}{5}\right]$.
29B. $\frac{\sqrt{7}+1}{3}; \frac{\sqrt{73}-5}{4}$. **30B.** $\sqrt{7}-2; \frac{5}{3}$. **31B.** $3\log_3 12; \frac{3}{4}$. **32B.** $\log_3 18; \frac{1}{6}$. **33B.**
 $[1; 4]$. **34B.** $[1; 4]$. **35B.** $[0; 2]$. **36B.** $[0; 2]$. **37B.** $-3; \frac{3}{2}$. **38B.** $-6; 3$. **39B.** $0; 7$.
40B. $0; 5$. **41B.** $(-\infty; -9) \cup \{-5; 3\} \cup (4; \infty)$. **42B.** $(-\infty; -12) \cup \{-7; 8\} \cup (9; \infty)$. **43B.**
 $12-8\sqrt{3}; 2$. **44B.** $12-8\sqrt{3}; 2$. **45B.** -4 . **46B.** -1 . **47B.** $5; 8$. **48B.** $9; 21$. **49B.**
 $\frac{1}{11}; 1$. **50B.** $\frac{1}{3}; 2$. **51B.** $\frac{-1-\sqrt{2}}{2}; -1; 0; \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$. **52B.**
 $(-\infty; -2) \cup (-2; 2-2\sqrt{2}) \cup (2+2\sqrt{2}; \infty)$. **53B.** $(-\infty; -1) \cup \{\sqrt{5}-1\} \cup (2; \sqrt{5})$. **54B.**
 $(-\infty; -1) \cup \{\sqrt{7}-1\} \cup (2; \sqrt{7})$. **55B.** $[-1; 0] \cup [7; 8]$. **56B.**
 $(2-2\sqrt{5}; 4-2\sqrt{5}) \cup (0; 6) \cup (2+2\sqrt{5}; 4+2\sqrt{5})$. **57B.** $(-2; 1-\sqrt{5}) \cup (-1; 0) \cup (1+\sqrt{5}; 8)$.
58B. $(1-\sqrt{5}; -1) \cup (0; 1+\sqrt{5})$. **59B.** $(-\infty; -3) \cup \{0\} \cup (3; \infty)$.