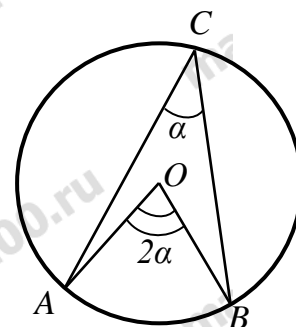


ОКРУЖНОСТИ

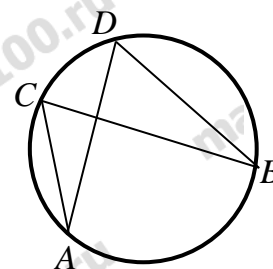
Окружностью называется множество всех точек плоскости, находящихся на равном положительном расстоянии от некоторой точки этой же плоскости. Эта точка называется **центром окружности**, а данное расстояние **радиусом окружности**.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**. Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен ей. Равные хорды окружности равноудалены от ее центра; равноудаленные от центра окружности хорды равны.

Центральным углом в окружности называется угол с вершиной в ее центре (это $\angle AOB$). Часть окружности, расположенная внутри центрального угла, называется **дугой окружности**, соответствующей этому центральному углу. **Градусной мерой дуги** окружности называется градусная мера соответствующего ей центрального угла.

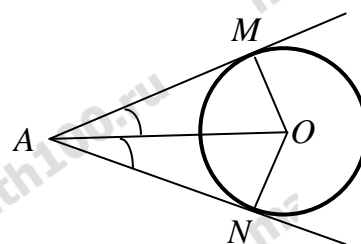


Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется **вписанным в окружность** (это $\angle ACB$). Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла, т.е. $\angle AOB = 2\angle ACB$.



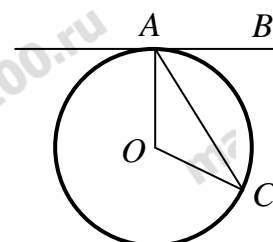
Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны ($\angle ACB = \angle ADB$).

Касательная к окружности: если из точки к окружности проведены две касательные, то длины отрезков от этой точки до точек касания равны ($AM = AN$) и прямая, проходящая через центр окружности и эту точку, обладает свойством: $\angle MAO = \angle NAO$.



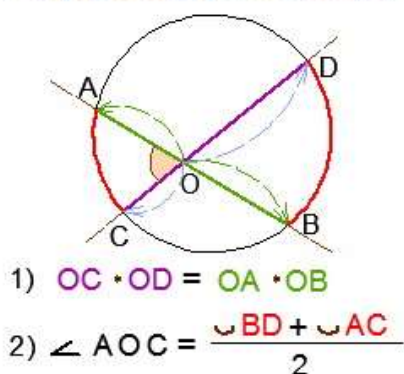
Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному к точке касания ($OA \perp AB$).

Мера угла между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине градусной меры дуги стягиваемой этой хордой, т.е. $\angle AOC = 2\angle BAC$.

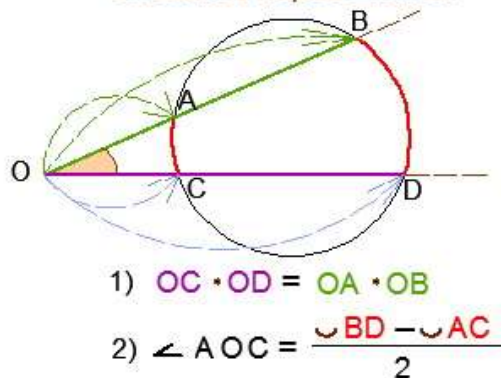


Свойство отрезков секущих:

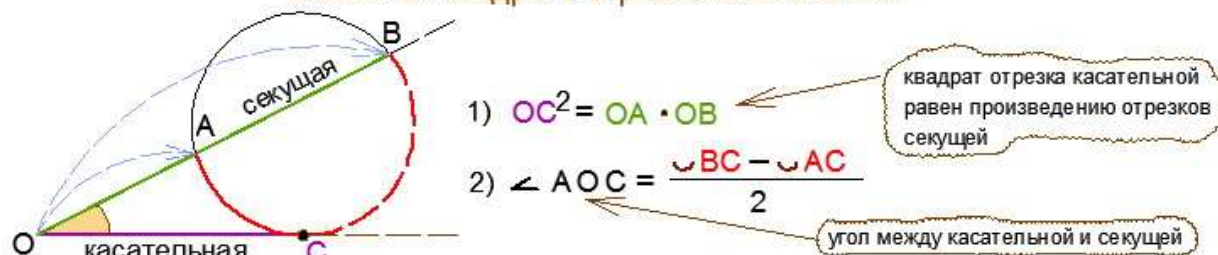
Внутреннее пересечение:



Внешнее пересечение:



Свойство квадрата отрезка касательной:



Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точку касания). При решении задач на касающиеся окружности полезно помнить следующие факты:

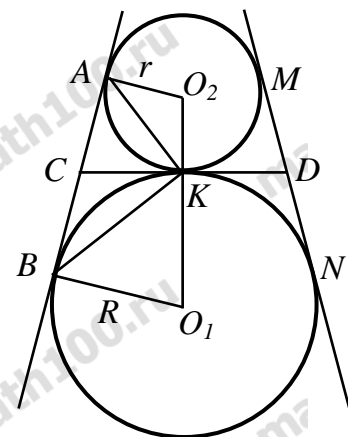
1) Точка касания двух окружностей лежит на линии центров этих окружностей. Этот факт при решении задач на касающиеся окружности, как правило, используется в первую очередь. При этом если в условии задачи не сказано, каким образом касаются окружности, то необходимо рассматривать и случай внешнего, и случай внутреннего касания.

2) Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

3) Окружности радиусов r и R ($r < R$) с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

4) Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K . Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K , в точке C . Тогда $\angle AKB = 90^\circ$ и $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$ и $CA = CB = CK$.

5) Отрезок общей внешней касательной AB к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной CD , заключённому между общими внешними касательными и эти отрезки $AB = CD = MN = 2\sqrt{Rr}$.

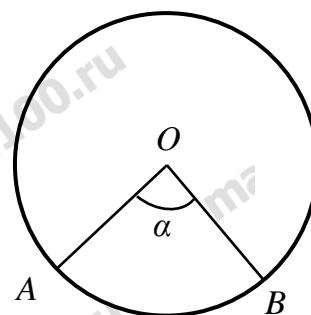
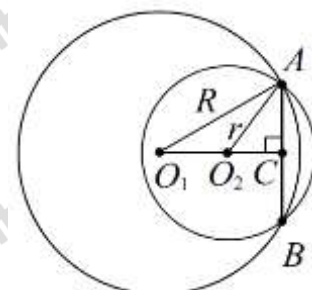
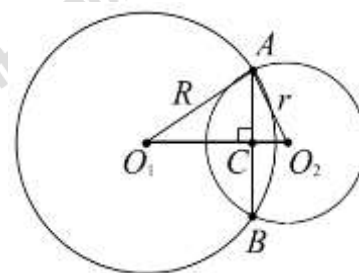


При решении задач на пересекающиеся окружности полезно помнить следующие факты:

1) Пересекающиеся окружности в точках A и B имеют общую хорду AB .

2) Линия центров пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам.

При этом если в условии задачи не сказано, как расположены центры окружностей O_1 и O_2 относительно их общей хорды AB , то необходимо рассматривать и случай когда они расположены по разные стороны от хорды, и случай когда по одну сторону.



Длина окружности радиуса R равна $L = 2\pi R$.

Площадь круга радиуса R равна $S = \pi R^2$.

Длина дуги $L_{AB} = 2\pi R \frac{\alpha}{360}$.

Площадь сектора $S_{OAB} = \pi R^2 \frac{\alpha}{360}$.

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 17 профильного ЕГЭ по теме «Окружность». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

Уровень А

1А. Из одной точки проведены к окружности две касательные длиной 12, а расстояние между точками касания 14,4. Определите радиус окружности.

2А. Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей. Найдите длину касательной.

3А. Внутри круга радиуса 15 взята точка M на расстоянии 13 от центра. Через точку M проведена хорда длиной 18. Найдите длины отрезков, на которые точка M делит хорду.

4А. Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C . Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.

5А. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки, равные 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

6А. В большей из двух концентрических окружностей (имеющих общий центр) проведена хорда, равная 32 и касающаяся меньшей окружности. Найдите радиус каждой из окружностей, если ширина образовавшегося кольца равна 8.

7А. Две прямые, проходящие через точку M , лежащую вне окружности с центром O , касаются окружности в точках A и B . Отрезок OM делится окружностью пополам. В каком отношении отрезок OM делится прямой AB ?

8А. Прямая, проходящая через точку M , удалённую от центра окружности радиуса 10 на расстояние, равное 26, касается окружности в точке A . Найдите AM .

9А. Окружности радиусов 5 и 3 касаются некоторой прямой. Линия центров пересекает эту прямую под углом 30° . Найдите расстояние между центрами окружностей.

10А. Окружность с центром O касается двух параллельных прямых. Проведена касательная к окружности, пересекающая эти прямые в точках A и B . Найдите угол AOB .

11А. На окружности радиуса $\sqrt{3}$ выбраны три точки таким образом, что окружность оказалась разделённой на три дуги, градусные меры которых относятся как $3 : 4 : 5$. В точках деления к окружности проведены касательные. Найдите периметр треугольника, образованного этими касательными.

12А. Две равные окружности касаются изнутри третьей и касаются между собой. Соединив три центра, получим треугольник с периметром, равным 18. Найдите радиус большей окружности.

13А. Три окружности радиусов 6, 7 и 8 попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих окружностей.

14А. Окружности радиусов 8 и 3 касаются внутренним образом. Из центра большей окружности проведена касательная к меньшей окружности. Найдите расстояние от точки касания до центра большей окружности.

15А. Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Найдите радиус r , если $AB = 12$, $R = 8$.

16А. Дана окружность радиуса $\sqrt{2} - 1$. Четыре окружности равных радиусов касаются данной внешним образом, и каждая из этих четырёх окружностей касается двух других. Найдите радиусы этих четырёх окружностей.

17А. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга внешним образом. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найдите радиус меньшей окружности, если радиусы большей и средней равны 6 и 4.

18А. Даны окружности радиусов 1 и 3 с общим центром O . Третья окружность касается их обеих. Найдите угол между касательными к третьей окружности, проведёнными из точки O .

19А. В угол, равный 60° , вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Радиус меньшей окружности равен 1. Найдите радиус большей окружности.

20А. Две окружности касаются друг друга внутренним образом. Известно, что два радиуса большей окружности, угол между которыми равен 60° , касаются меньшей окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

21А. В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и двух сторон треугольника касается меньшая окружность. Найдите сторону треугольника, если радиус малой окружности равен $\sqrt{3}$.

22А. В круговой сектор с центральным углом 120° вписана окружность. Найдите её радиус, если радиус данной окружности равен 1.

23А. Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B . Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A , а большую – в точке C . Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Найдите BC .

24А. Прямая, проходящая через общую точку A двух окружностей, вторично пересекает эти окружности в точках B и C . Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите BC , если известно, что точка A лежит на отрезке BC .

25А. Отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, делится их общей хордой на отрезки, равные 5 и 2. Найдите общую хорду, если известно, что радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.

26А. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BC = 8$ и $BD = 4$.

27А. Две пересекающиеся окружности имеют общую касательную. Расстояние между точками касания равно 4. Расстояние между центрами окружностей равно 5, а радиус меньшей окружности равен 2. Найдите величину радиуса большей окружности.

28А. Точка M внутри окружности делит хорду этой окружности на отрезки, равные 2 и 8. Через точку M проведена хорда AB , делящаяся точкой M пополам. Найдите AB .

29А. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K . Известно, что $AB = 2$, $BK = 4$, $AK = 3$, $CD = 3$. Найдите AC .

30А. Из точки, расположенной вне окружности на расстоянии $\sqrt{7}$ от центра, проведена секущая, внутренняя часть которой вдвое меньше внешней и равна радиусу окружности. Найдите радиус окружности.

31А. Из точки A проведены два луча, пересекающие данную окружность: один — в точках B и C , другой — в точках D и E . Известно, что $AB = 7$, $BC = 7$, $AD = 10$. Найдите DE .

32А. В квадрат $ABCD$ со стороной $\sqrt{5}$ вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E . Найдите хорду, соединяющую точки, в которых окружность пересекается с прямой AE .

33А. В окружности с центром O проведены хорды AB и CD , пересекающиеся в точке M , причём $AM = 4$, $MB = 1$, $CM = 2$. Найдите угол OMC .

34А. Через точку M проведены две прямые. Одна из них касается некоторой окружности в точке A , а вторая пересекает эту окружность в точках B и C , причём $BC = 7$ и $BM = 9$. Найдите AM .

35А. На стороне AC угла ACB , равного 45° , взята такая точка D , что $CD = AD = 2$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A , D и касающейся прямой BC .

36А. Один из смежных углов с вершиной A вдвое больше другого. В эти углы вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 . Найдите углы треугольника O_1AO_2 , если отношение радиусов окружностей равно $\sqrt{3}$.

37А. Расстояния от точки M , расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 1 и 3. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол и проходящей через точку M .

38А. Расстояния от точки M , расположенной внутри угла, равного 60° , до сторон угла равны 1 и 3. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол и проходящей через точку M .

39А. Окружность касается сторон угла с вершиной A в точках B и C . Найдите градусные меры дуг, на которые окружность делится точками B и C , если $\angle BAC = 70^\circ$.

40А. Треугольник ABC равнобедренный. Радиус OA описанного круга образует с основанием AC угол OAC , равный 20° . Найдите угол BAC .

41А. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекая сторону AB в точке E и сторону BC в точке F . Угол AEC в 5 раз больше угла BAF , а угол ABC равен 72° . Найдите радиус окружности, если $AC = 6$.

42А. Из точки P , расположенной внутри острого угла с вершиной A , опущены перпендикуляры PC и PB на стороны угла. Известно, что $\angle CBP = 25^\circ$. Найдите угол CAP .

43А. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ACB = 25^\circ$, $\angle ACD = 40^\circ$ и $\angle BAD = 115^\circ$. Найдите угол ADB .

44А. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABC = 116^\circ$, $\angle ADC = 64^\circ$, $\angle CAB = 35^\circ$ и $\angle CAD = 52^\circ$. Найдите угол между диагоналями, опирающийся на сторону AB .

45А. Радиус окружности равен 1. Найдите величину вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{3}$. Ответ дайте в градусах.

46А. Площадь круга, ограниченного некоторой окружностью, равна 12π , AC – диаметр этой окружности, точка O – ее центр. Точка B лежит на окружности, причем площадь треугольника AOB равна 3. Найдите величину угла CAB .

47А. Длина окружности равна 20π . Диаметр AB и хорда CD лежат на параллельных прямых. Расстояние между указанными прямыми равно $\sqrt{19}$. Найдите длину хорды BC .

48А. Длина окружности равна 10π , AC – диаметр этой окружности. Точка B лежит на окружности, причем площадь треугольника ABC равна 15. Найдите величину угла CAB .

49А. Хорда AB равна 13, а хорда AC равна 7. Найдите длину отрезка BC , если радиус окружности равен $\frac{13\sqrt{3}}{3}$.

50А. Дана окружность радиуса 25. Точка M – середина радиуса OK . Хорда AC перпендикулярна радиусу OK , B – точка их пересечения. Найти расстояние BM , если известно, что $AB - BK = 6$.

51А. Из точки M , лежащей вне окружности радиуса 1, проведены к окружности две взаимно перпендикулярные касательные MA и MB . Между точками касания A и B на меньшей дуге AB взята произвольная точка C , и через неё проведена третья касательная KL , образующая с касательными MA и MB треугольник KLM . Найдите периметр этого треугольника.

52А. На основании равнобедренного треугольника, равном 8, как на хорде построена окружность, касающаяся боковых сторон треугольника. Найдите радиус окружности, если высота, опущенная на основание треугольника, равна 3.

53А. Радиусы двух окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами равно 34. Найдите длины общих касательных к этим окружностям.

54А. Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Третья окружность касается обеих окружностей и их общей внешней касательной. Найдите радиус третьей окружности.

55А. Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Третья окружность касается обеих окружностей и их общей внутренней касательной. Найдите радиус третьей окружности.

56А. Дан отрезок длины 20. Три окружности радиуса 4 имеют центры в концах отрезка и в его середине. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся трех данных.

57А. Две окружности радиусов 4 и 3 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются некоторой прямой в точках M_1 и M_2 соответственно и лежат по разные стороны от этой прямой. Отношение отрезка O_1O_2 к отрезку M_1M_2 равно $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Найдите O_1O_2 .

58А. Две окружности радиусов 12 и 7 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются некоторой прямой в точках M_1 и M_2 соответственно и лежат по одну сторону от этой прямой. Отношение отрезков M_1M_2 и O_1O_2 равно $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Найдите M_1M_2 .

59А. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найдите радиус окружности.

60А. Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A . Общая касательная к обеим окружностям, проведённая через точку A , пересекается с другой их общей касательной в точке B . Найдите радиус второй окружности, если $AB = 4$.

61А. Две окружности с центрами O_1 , O_2 и радиусами 32, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найдите радиус окружности, которая касается изнутри обеих окружностей и касается отрезка O_1O_2 .

62А. Две окружности радиусов 6 и 2 касаются сторон данного угла и друг друга. Найдите радиус третьей окружности, касающейся сторон того же угла, центр которой находится в точке касания окружностей между собой.

63А. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает большую окружность в точках A и D , а меньшую — в точках B и C . Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$.

64А. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A . Найдите радиус меньшей окружности, если хорды, соединяющие точку A с точками касания с одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8.

65А. В угол вписано четыре окружности, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найдите сумму длин второй и третьей окружностей, если радиус первой окружности равен 1, а площадь круга, ограниченного четвёртой окружностью, равна 64π .

66А. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BD = 7$, $BC = 13$.

67А. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причём остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Касательная $СК$, проведённая из вершины C к этой же окружности, равна 2. Найдите диаметр окружности.

68А. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся катета BC . Найдите длину отрезка гипотенузы AC , который лежит внутри этой окружности.

69А. В треугольнике ABC сторона BC равна 4, а медиана, проведённая к этой стороне, равна 3. Найдите длину общей хорды двух окружностей, каждая из которых проходит через точку A и касается BC , причём одна касается BC в точке B , а вторая — в точке C .

70А. Из точки A , находящейся на расстоянии 5 от центра окружности радиуса 3, проведены две секущие AKC и ALB , угол между которыми равен 30° (K, C, L, B — точки пересечения секущих с окружностью). Найдите площадь треугольника AKL , если площадь треугольника ABC равна 10.

71А. На прямой расположены точки A, B, C и D , следующие друг за другом в указанном порядке. Известно, что $BC = 3$, $AB = 2CD$. Через точки A и C проведена некоторая окружность, а через точки B и D — другая. Их общая хорда пересекает отрезок BC в точке K . Найдите BK .

72А. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и проходит через вершину C . Сторону DC она пересекает в точке N . Найдите площадь трапеции $ABND$, если $AB = 9$ и $AD = 8$.

73А. В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D прямые. Диагональ AC образует со стороной AB острый угол в 40° , а со стороной AD — угол в 30° . Найдите острый угол между диагоналями AC и BD .

74А. В прямоугольном треугольнике ABC угол при вершине A равен 60° , O — середина гипотенузы AB , P — центр вписанной окружности. Найдите угол POC .

75А. Дан треугольник ABC . Из вершины A проведена медиана AM , а из вершины B — медиана BP . Известно, что угол APB равен углу BMA . Косинус угла ACB равен 0,8 и $BP = 1$. Найдите площадь треугольника ABC .

ОТВЕТЫ

1А. 9. **2А.** 6. **3А.** 4 и 14. **4А.** 80° . **5А.** 8 и 15. **6А.** 12 и 20. **7А.** 1 : 3. **8А.** 24. **9А.** 16 или 4. **10А.** 90° . **11А.** $12 + 6\sqrt{3}$. **12А.** 9. **13А.** 84. **14А.** 4. **15А.** 24. **16А.** 1. **17А.** 2. **18А.** 60° . **19А.** 3. **20А.** 3 : 1. **21А.** 18. **22А.** $2\sqrt{3} - 3$. **23А.** $2\sqrt{2}$. **24А.** 24. **25А.** $2\sqrt{3}$. **26А.** 6 или 2. **27А.** 5. **28А.** 8. **29А.** 9. **30А.** 1. **31А.** 0,2. **32А.** 2. **33А.** 90° . **34А.** 12 или $3\sqrt{2}$. **35А.** $\sqrt{2}$ или $5\sqrt{2}$. **36А.** 90° ; 45° ; 45° или 90° ;

$\operatorname{arctg} 3$; $\operatorname{arcctg} 3$. 37А. $4 \pm \sqrt{6}$. 38А. $\frac{8 \pm 2\sqrt{3}}{3}$. 39А. 110° и 250° . 40А. 35° и 55° .
41А. 3. 42А. 25° . 43А. 25° . 44А. 81° . 45А. 60° и 120° . 46А. 15° и 75° . 47А.
 $2\sqrt{5}$ или $2\sqrt{95}$. 48А. $\operatorname{arctg} 3$ или $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$. 49А. 8 или 15. 50А. 5,5 или 11,5. 51А.
2. 52А. $\frac{20}{3}$. 53А. 16 или 30. 54А. $\frac{225}{64}$; $\frac{225}{16}$; $\frac{225}{4}$; $\frac{25}{4}$. 55А. $\frac{189}{4}$; $\frac{21}{4}$. 56А.
6,25 или 12,5. 57А. 14. 58А. 10. 59А. $\frac{120}{17}$. 60А. 8. 61А. 7. 62А. 3. 63А. 3. 64А.
3,75. 65А. 12π . 66А. 3 или 10. 67А. $\sqrt{10}$. 68А. 1,1. 69А. $\frac{5}{3}$. 70А. 1,6. 71А. 2.
72А. 40. 73А. 80° . 74А. 15° . 75А. $\frac{2}{3}$.

Уровень В

1В (ЕГЭ 2019). Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CH .

а) Докажите, что отношение площадей кругов, построенных на отрезках AH и BH соответственно как на диаметрах равно $\operatorname{tg}^4 \angle ABC$.

б) Пусть точка O_1 — центр окружности диаметра AH , вторично пересекающей отрезок AC в точке P , а точка O_2 — центр окружности с диаметром BH , вторично пересекающей отрезок BC в точке Q . Найдите площадь четырёхугольника O_1PQO_2 , если $AC = 22$ и $BC = 18$.

2В (ЕГЭ 2019). Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD , если известно, что радиус первой окружности равен 4, а радиус второй окружности равен 1.

3В. Общие внутренние касательные к двум окружностям перпендикулярны. Одна из них касается окружностей в точках A и C , вторая — в точках B и D (точки A и B лежат на одной окружности).

а) Докажите, что отрезок AC равен сумме радиусов окружностей.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $AB = 6$, $CD = 8$.

4В. Хорда AB окружности параллельна касательной, проходящей через точку C , лежащую на окружности.

- а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- б) Найдите радиус окружности, если расстояние между касательной и прямой AB равно 1 и $\angle ACB = 150^\circ$.

5В (ЕГЭ 2014). Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

6В. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

- а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.
- б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

7В. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Прямая l касается этой окружности и параллельна прямой AC . Расстояние от точки B до прямой l равно радиусу окружности.

- а) Докажите, что треугольник ABC равносторонний.
- б) Найдите расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон AB и BC , если радиус окружности равен 3.

8В. Через центр O окружности, вписанной в треугольник ABC , провели прямую MN параллельно стороне AB (M лежит на BC , N лежит на AC).

- а) Докажите, что площади треугольников AON и BOM пропорциональны отрезкам AN и BM .
- б) Найдите периметр четырёхугольника $ABMN$, если $AB = 5$, $MN = 3$.

9В (ЕГЭ 2014). К двум непересекающимся окружностям равных радиусов проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках A и B . Через точку C , лежащую на отрезке AB , проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках D и E , причём отрезки CA и CD касаются одной окружности, а отрезки CB и CE — другой.

- а) Докажите, что периметр треугольника CDE вдвое больше расстояния между центрами окружностей.
- б) Найдите DE если радиусы окружностей равны 5, расстояние между их центрами равно 18, а $AC = 8$.

10В. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$; E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами AD и BC соответственно.

а) Докажите, что $EK \parallel AB$.

б) Найдите площадь трапеции $ABKE$, если радиус окружности равен 1, а $\angle BAD = 60^\circ$.

11В. Окружность с центром O касается боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC , продолжения боковой стороны AC и продолжения основания BC в точке N . Точка M — середина основания BC .

а) Докажите, что $AN = OM$.

б) Найдите OM , если стороны треугольника ABC равны 10, 10 и 12.

12В. Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке M . Окружность с центром O_1 касается стороны BC в точке N , а также касается продолжений сторон AC и AB .

а) Докажите, что около четырёхугольника $BOCO_1$ можно описать окружность.

б) Найдите площади четырёхугольников $BOCO_1$, если $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$.

13В. Точки M и N — середины сторон соответственно AB и AC треугольника ABC . Прямая, проходящая через вершину A , пересекает отрезки MN и BC в точках K и L соответственно, причём в четырёхугольник $BMKL$ можно вписать окружность.

а) Докажите, что периметр треугольника AMK вдвое больше отрезка BL .

б) Найдите AL , если $AB = 12$, $BC = 16$, $AC = 20$.

14В. Хорды AD , BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A , B , C , D , E последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

15В. Окружность с центром O вписана в угол, равный 60° . Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O .

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{3}$.

16В. Окружность с центром O и окружность вдвое меньшего радиуса касаются внутренним образом в точке A . Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M .

а) Докажите, что M — середина AB .

б) Луч OM пересекает большую окружность в точке P . Найдите расстояние от центра окружности до хорды AP , если радиус большей окружности равен 13, а $OM = 5$.

17В. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C . К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая внутренняя касательная. Эти касательные пересекаются в точке D .

а) Докажите, что треугольник O_1DO_2 прямоугольный.

б) Найдите радиусы окружностей, если $DO_1 = \sqrt{5}$ и $DO_2 = 2\sqrt{5}$.

18В. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке A внешним образом. Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает первую окружность в точке B , а вторую — в точке C .

а) Докажите, что $O_2C \parallel O_1B$.

б) Найдите площадь треугольника BCO_2 , если известно, что радиусы первой и второй окружностей равны 5 и 8 соответственно, а $\angle ABO_1 = 15^\circ$.

19В. В треугольник ABC помещены две касающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 , причём первая из них касается сторон AB и AC , а вторая — сторон AB и BC .

а) Докажите, что прямые AO_1 и BO_2 пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC .

б) Найдите радиусы окружностей, если они равны, а $AB = AC = 10$ и $BC = 12$.

20В. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом; прямая касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Известно, что точка M пересечения диагоналей четырёхугольника O_1ABO_2 лежит на первой окружности.

а) Докажите, что треугольник MBO_2 равнобедренный.

б) Найдите отношение радиусов окружностей.

21В. В полуокружности расположены две окружности, касающиеся друг друга, полуокружности и её диаметра.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах окружностей и полуокружности равен диаметру полуокружности.

б) Известно, что радиус полуокружности равен 8, а радиус одной из окружностей равен 4. Найдите радиус другой.

22В. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC расположены две окружности, каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Пусть P и Q — точки касания окружностей с боковой стороной AB , а общая касательная окружностей, проходящая через их точку касания, пересекает боковые стороны в точках M и N .

а) Докажите, что $MN = PQ$.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AD = 18$ и $BC = 2$.

23В. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны: $AC = 15$, $BC = 8$. Окружность радиуса $2,5$ с центром на стороне BC проходит через вершину C . Вторая окружность с центром O касается катета AC , гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{4}$ длины катета AC .

б) Найдите радиус второй окружности.

24В. Две окружности касаются внешним образом в точке C . Прямая касается меньшей окружности в точке A , а большей — в точке B , отличной от A . Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке D , прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке E .

а) Докажите, что прямая AE параллельна прямой BD .

б) Пусть L — отличная от D точка пересечения отрезка DE с большей окружностью. Найдите EL , если радиусы окружностей равны 2 и 5 .

25В (ЕГЭ 2017). Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M , отличной от A . Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P .

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin \angle AOC = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K . Найдите отношение $QK : KA$.

26В. Окружности, построенные на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, пересекаются в точке D , отличной от A .

а) Докажите, что точка D лежит на прямой BC .

б) Найдите угол BAC , если $\angle ACB = 30^\circ$, $DB : DC = 1 : 3$ и точка D лежит на отрезке BC .

27В. Окружности с центрами O_1 и O_2 разных радиусов пересекаются в точках A и B . Хорда AC большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M и делится этой точкой пополам.

а) Докажите, что проекция отрезка O_1O_2 на прямую AC в четыре раза меньше AC .

б) Найдите O_1O_2 , если радиусы окружностей равны 5 и 17 , а $AC = 16$.

28В. Дана трапеция с основаниями AD и BC . Окружности, построенные на боковых сторонах AB и CD как на диаметрах, пересекаются в точках M и N .

а) Докажите, что $MN \perp AD$.

б) Найдите MN , если боковые стороны трапеции равны 12 и 16, а сумма проекций диагоналей на большее основание равна 20.

29В. Отрезок AB — диаметр окружности с центром O . Вторая окружность с центром в точке B пересекается с первой окружностью в точках C и D . Касательная, проведённая в точке C к первой окружности, вторично пересекает вторую окружность в точке P .

а) Докажите, что треугольники AOC и CBP подобны.

б) Найдите AP , если известно, что $BC = 15$ и $PC = 24$.

30В. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC . Около треугольников ACM и BCM описаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно.

а) Докажите, что треугольник O_1MO_2 прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если $AC = 72$, $BC = 96$.

31В. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Прямая, проходящая через точку P , второй раз пересекает первую окружность в точке A , а вторую — в точке D . Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD , второй раз пересекает первую окружность в точке B , а вторую — в точке C .

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

32В (ЕГЭ 2017). Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B , причём точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB . Продолжения диаметра CA первой окружности и хорды CB этой окружности пересекают вторую окружность в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите AD , если $\angle DAE = \angle BAC$, радиус второй окружности втрое больше радиуса первой и $AB = 3$.

33В (ЕГЭ 2017). Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами 3 и 4 пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена прямая MK пересекающая обе окружности в точках M и K , причем точка A находится между ними.

а) Докажите, что треугольники BMK и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой MK , если $O_1O_2 = 5$, $MK = 7$.

34В. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC . На отрезке CM как на диаметре построена окружность.

а) Докажите, что она проходит через середины катетов.

б) AP и BQ — касательные к этой окружности (P и Q — точки касания). Найдите отношение $AP : BQ$, если $\operatorname{tg} \angle ABC = 2$.

35В. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медианы AM и BN . Около четырёхугольника $ABMN$ можно описать окружность.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABMN$, если $AB = 4\sqrt{5}$.

36В. Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC . Окружность, проходящая через точки C и D , касается стороны AB и пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что $MN \parallel AB$.

б) Найдите MN , если $AD = 2$, $BD = 4$ и $AM = 1$.

37В. Из точки A проведены секущая и касательная к окружности радиуса $2\sqrt{7}$. Пусть B — точка касания, а D и C — точки пересечения секущей с окружностью, причём точка D лежит между A и C . Известно, что BD — биссектриса треугольника ABC и её длина равна $2\sqrt{7}$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние от точки A до центра окружности.

38В. Около треугольника ABC описана окружность. Касательная к окружности, проходящая через точку B , пересекает прямую AC в точке M .

а) Докажите, что треугольники AMB и BMC подобны.

б) Найдите отношение $AM : MC$, если известно, что $AB : BC = 3 : 2$.

39В. Окружность, проходящая через вершины A , B и C прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямыми углами при вершинах A и B , пересекает отрезки AD и CD соответственно в точках M и N , причём $AM : AD = CN : CD = 1 : 3$.

а) Докажите, что $CD = AD$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиус окружности равен 3.

40В. Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 26 и 38 соответственно.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.

б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

41В. Пусть CQ — биссектриса треугольника ABC . Касательная к описанной окружности треугольника ABC , проходящая через точку C , пересекает прямую AB в точке D .

а) Докажите, что треугольник CDQ равнобедренный.

б) Найдите CD , если $BQ = 3$ и $AQ = 1$.

42В. В окружность вписан четырёхугольник с тремя равными сторонами.

а) Докажите, что в этом четырёхугольнике есть параллельные стороны.

б) Найдите диагонали четырёхугольника, если радиус окружности равен 25, а каждая из трёх равных сторон четырёхугольника равна 30.

43В. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\cos \angle ABC = -\cos \angle ADC$.

а) Докажите, что этот четырёхугольник вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника, если $\angle ACB = 30^\circ$, $BC = 6$, а высоты треугольников ABD и CBD , проведённые из вершины B , равны.

44В. Диагонали трапеции перпендикулярны боковым сторонам.

а) Докажите, что трапеция равнобедренная.

б) Найдите площадь трапеции, если её основания равны 10 и 26.

45В. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая CD касается окружности, описанной около треугольника ABD .

а) Докажите, что диагональ BD равна одной из сторон параллелограмма.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $BD = 2$ и $\angle BCD = 45^\circ$.

46В. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D , лежащих по разные стороны от прямой AB . Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E .

а) Докажите, что четырёхугольник $ACED$ вписанный.

б) Найдите AE , если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

47В. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB .

а) Докажите, что $\angle BPQ = \angle BAC$.

б) Известно, что площадь треугольника ABC равна 96, площадь четырёхугольника $AQPC$ равна 72, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. Найдите PQ .

48В. На окружности с центром O и диаметром MN , равным 34, взята точка K на расстоянии 15 от этого диаметра. Хорда KE пересекает радиус OM в точке F под углом, равным $\arccos \frac{4}{5}$.

а) Докажите, что $KF : FE = 125 : 29$.

б) Найдите площадь треугольника KEN .

49В (ЕГЭ 2021). Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причём $AE = ED = CD$, а прямые AC и BE перпендикулярны. Отрезки AC и BD пересекаются в точке T .

а) Докажите, что прямая EC пересекает отрезок TD в его середине.

б) Найдите площадь треугольника ABT , если $BD = 6$, $AE = \sqrt{6}$.

50В (ЕГЭ 2022). Две окружности пересекаются в точках A и B . Общая касательная к этим окружностям касается их в точках C и D . Прямая AB пересекает отрезок CD в точке M , центры окружностей лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB , точка B лежит между точками A и M .

а) Докажите, что $CM = MD$.

б) Найдите расстояние между центрами данных окружностей, если их радиусы равны 1 и 3 соответственно, а точка B является серединой отрезка AM .

51В (ЕГЭ 2023). Точка B лежит на отрезке AC . Прямая, проходящая через точку A , касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K . Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D .

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны;

б) Найдите площадь треугольника DBC , если $AK = 7$ и $MK = 14$.

52В (ЕГЭ 2023). Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P . Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны;

б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP . Найдите AL , если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

53В (ЕГЭ 2023). Две окружности касаются внутренним образом в точке K , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C . Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L .

а) Докажите, что $CN : CM = LB : LA$;

б) Найдите MN , если $LB : LA = 2 : 3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

54В (ЕГЭ 2023). Окружность касается одной из сторон прямого угла D в точке E и пересекает другую сторону угла в точках A и B . Точка A лежит на отрезке BD , а AC – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $DE = \frac{1}{2}BC$.

б) Найдите расстояние от точки E до прямой AC , если $AD = 2$, $AB = 6$.

ОТВЕТЫ

1В. 99. 2В. $\sqrt{65}$. 3В. 49. 4В. $4 + 2\sqrt{3}$. 5В. 3,2. 6В. 1,92. 7В. $3\sqrt{3}$. 8В. 11. 9В. 12,375. 10В. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. 11В. $2\sqrt{41}$. 12В. 32. 13В. 15. 14В. $117\sqrt{3}$. 15В. $3\sqrt{5}$. 16В. $3\sqrt{13}$. 17В. 1 и 4. 18В. 26. 19В. $\frac{15}{8}$. 20В. 1 : 2. 21В. 2. 22В. $80\sqrt{3}$. 23В. 2,5. 24В. $\frac{8\sqrt{19}}{19}$. 25В. 1 : 4. 26В. 90° . 27В. $2\sqrt{85}$ и $4\sqrt{10}$. 28В. 9,6. 29В. $4\sqrt{97}$. 30В. 62,5. 31В. 2 : 1. 32В. 9. 33В. $\frac{84}{25}$. 34В. 2 : 1. 35В. 5. 36В. 4,5. 37В. 7. 38В. 9 : 4. 39В. $12\sqrt{5}$. 40В. 5. 41В. 1,5. 42В. 48. 43В. 6. 44В. 216. 45В. 4. 46В. 24. 47В. 8. 48В. 267,96. 49В. $\frac{8\sqrt{5}}{3}$. 50В. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. 51В. $\frac{147\sqrt{5}}{5}$. 52В. $\sqrt{10}$. 53В. $\frac{115}{6}$. 54В. 4.