

ОКРУЖНОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С ТРЕУГОЛЬНИКОМ

В этом разделе будут рассмотрены задачи, содержащие описанные, вписанные и невписанные окружности, связанные с треугольником.

Окружность, **описанная около треугольника** — окружность, на которой лежат все вершины треугольника, при этом треугольник называется вписанным в окружность. Около всякого треугольника можно описать окружность, и притом только одну. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы, центр окружности остроугольного треугольника расположен внутри треугольника, центр описанной окружности тупоугольного треугольника — вне треугольника.

Во всяком треугольнике отношение любой стороны к синусу противоположного ей угла постоянно и равно диаметру описанной около треугольника окружности (**обобщенная теорема синусов**), т.е.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности, $S = \frac{abc}{4R}$, где R — радиус описанной окружности. Последнюю формулу используют не только для нахождения площади треугольника, но и для нахождения радиуса описанной окружности. Радиус окружности описанной около прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы.

Окружность называется **вписанной в треугольник**, если она касается всех его сторон; при этом треугольник называется описанным вокруг окружности. Во всякий треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности, т.е. $S = pr$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр, а r — радиус вписанной окружности. Последнюю формулу используют не только для нахождения площади треугольника, но и для нахождения радиуса вписанной окружности. Для прямоугольного треугольника радиус вписанной окружности $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a, b — катеты, а c — гипотенуза.

Вневписанной в треугольник окружностью называется окружность, к которой являются касательными одна из сторон треугольника и продолжения двух его других сторон. У каждого треугольника есть три вневписанных окружности. Продолжения биссектрис внутренних углов треугольника проходят

через центры вневписанных окружностей, являющихся точками, в которых пересекаются биссектрисы внешних углов этого треугольника. Радиус вневписанной окружности, касающейся стороны треугольника, имеющей длину a , выражается формулой: $r = \frac{S}{p-a}$, где S и p – площадь и полупериметр треугольника.

При решении задач этого раздела полезными будут следующие свойства:

Центральным углом в окружности называется угол с вершиной в ее центре (это $\angle AOB$). Часть окружности, расположенная внутри центрального угла, называется **дугой окружности**, соответствующей этому центральному углу. **Градусной мерой дуги** окружности называется градусная мера соответствующего ей центрального угла.

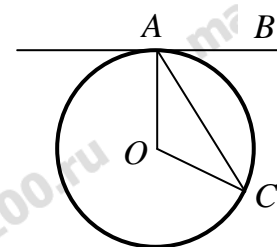
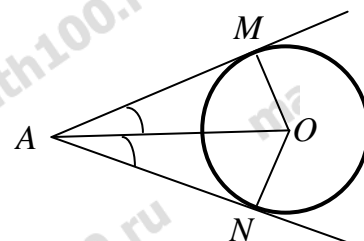
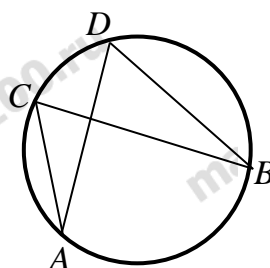
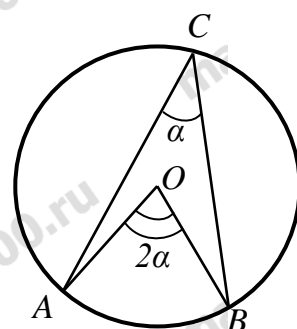
Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется **вписанным в окружность** (это $\angle ACB$). Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла, т.е. $\angle AOB = 2\angle ACB$.

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны ($\angle ACB = \angle ADB$).

Касательная к окружности: если из точки к окружности проведены две касательные, то длины отрезков от этой точки до точек касания равны ($AM = AN$) и прямая, проходящая через центр окружности и эту точку, обладает свойством: $\angle MAO = \angle NAO$.

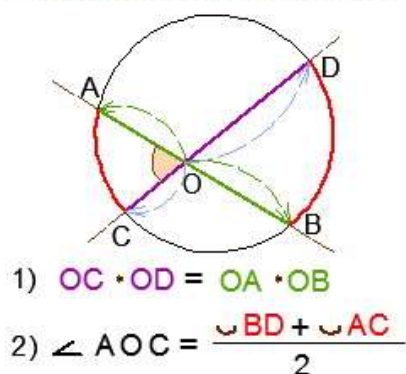
Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному к точке касания ($OA \perp AB$).

Мера угла между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине градусной меры дуги стягиваемой этой хордой, т.е. $\angle AOC = 2\angle BAC$.

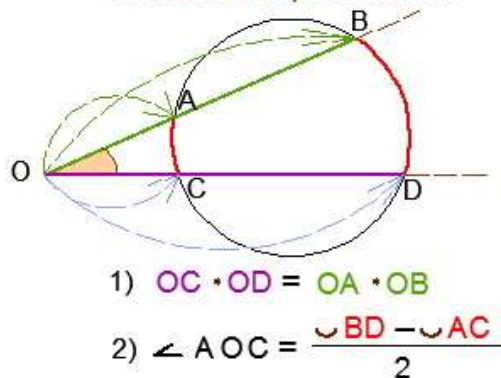


Свойство отрезков секущих:

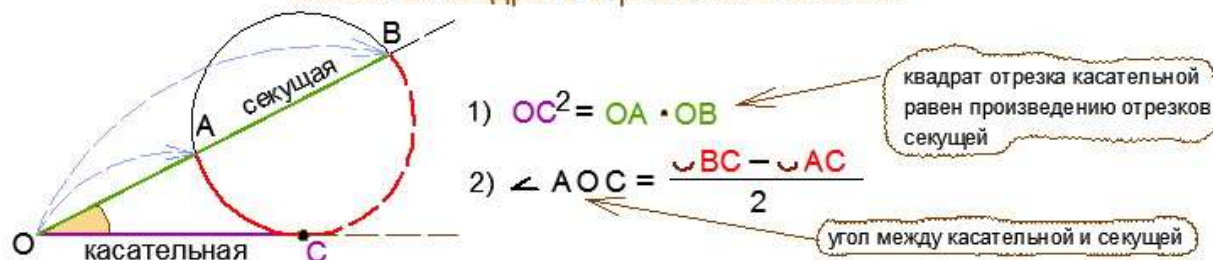
Внутреннее пересечение:



Внешнее пересечение:



Свойство квадрата отрезка касательной:



Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 17 профильного ЕГЭ по теме «Окружности, связанные с треугольником». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

Уровень А

1А. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2, угол при вершине равен 120° . Найдите диаметр описанной окружности.

2А. Под каким углом видна из точек окружности хорда, равная радиусу?

3А. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b , а гипотенуза равна c . Найдите радиус вписанной окружности.

4А. Дан треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Найдите радиусы его описанной, вписанной и внеписанных окружностей.

5А. Дан треугольник со сторонами 13, 13 и 10. Найдите радиусы его описанной, вписанной и внеписанных окружностей.

6А. Дан треугольник со сторонами 13, 14 и 15. Найдите радиусы его описанной, вписанной и внеписанных окружностей.

7А. Найдите площадь треугольника ABC , если в него вписана окружность с центром O , причем $\angle AOC = 165^\circ$, $AB = 8$, $BC = 7$.

8А. Найдите радиус окружности, вписанной в остроугольный треугольник ABC , если высота BH равна 12 и известно, что $\sin \angle A = 12/13$, $\sin \angle C = 4/5$.

9А. В треугольник вписан круг радиуса 4. Одна из сторон треугольника, разделена точкой касания на части 6 и 8. Найдите длины двух других сторон.

10А. В треугольник со сторонами $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 4$ вписана окружность. Найдите длину отрезка DE , где D и E – точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.

11А. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается стороны AC в точке M . В треугольнике проведена высота BO , равная 12. Известно, что точка M делит отрезок AO на части: $AM = 14$ и $MO = 2$. Найдите площадь треугольника ABC .

12А (ЕГЭ, 2002). В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания вписанной окружности в отношении $8 : 5$, считая от вершины, лежащей против основания. Найдите основание треугольника, если радиус вписанной окружности равен 10.

13А (ЕГЭ, 2002). В равнобедренный треугольник PMK с основанием MK вписана окружность с радиусом $2\sqrt{3}$. Высота PH делится точкой пересечения с окружностью в отношении $1 : 2$, считая от вершины P . Найдите периметр треугольника PMK .

14А (ЕГЭ, 2002). В треугольник ABC вписана окружность с центром O . Луч AO пересекает сторону BC в точке K . Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 13$, $AC = 15$, $BK = 6,5$.

15А (ЕГЭ, 2004). Основание равнобедренного треугольника равно 36. вписанная окружность касается боковых сторон в точках A и P , $AP = 12$. Найдите периметр треугольника.

16А. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность. Параллельно его основанию AC проведена касательная к окружности, пересекающая боковые стороны в точках D и E . Найдите радиус окружности, если $DE = 8$, $AC = 18$.

17А. Центр вписанной окружности делит высоту равнобедренного треугольника, опущенную на основание, на отрезки 5 и 3, считая от вершины. Определите стороны треугольника.

18А. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 и высотой 8, проведена касательная, параллельная основанию. Найдите длину отрезка этой касательной, заключенной между сторонами треугольника.

19А. В равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 50, с основанием, равным 30, вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания на боковых сторонах.

20А. Боковая сторона и основание равнобедренного треугольника равны соответственно 5 и 6. Определите расстояние между точкой пересечения высот треугольника и центром вписанной в него окружности.

21А. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 3. Найдите площадь треугольника.

22А (ЕГЭ, 2002). Окружность с центром O , вписанная в прямоугольный треугольник ABC , касается гипотенузы AB в точке M , $AM = 12$, $BM = 8$. Найдите площадь треугольника AOB .

23А. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Найдите длины сторон треугольника.

24А. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны соответственно $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$. Найдите катеты.

25А. Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Проведена окружность, касающаяся обоих катетов и имеющая центр на гипотенузе. Найдите отрезки, на которые центр окружности делит гипотенузу.

26А. Найдите площадь треугольника, если его стороны относятся как 7:15:20, а радиус описанной окружности равен 25.

27А. Величины углов треугольника относятся как 2 : 3 : 7. Длина наименьшей стороны равна 5. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

28А. В окружность радиуса 4 вписан треугольник с углами 15° и 60° . Найдите площадь треугольника.

29А. В треугольнике BCE $\angle C = 60^\circ$, $CE : BC = 3 : 1$. Отрезок CK – биссектриса треугольника. Найдите KE , если радиус описанной около треугольника окружности равен $8\sqrt{3}$.

30А. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана треугольника AM продлена до пересечения с окружностью в точке K . Найдите сторону AC , если $AM = 18$, $MK = 8$, $BK = 10$.

31А. В треугольнике ABC биссектриса угла A продолжена до пересечения в точке D с описанной около треугольника окружностью. Найдите длину стороны BC , если $AB = 75$, $AC = 48$, $AD = 100$.

32А (ЕГЭ, 2004). Треугольник BMP с углом B , равным 45° , вписан в окружность радиуса $6\sqrt{2}$. Найдите длину медианы BK , если луч BK пересекает окружность в точке C и $CK = 3$.

33А. Одна из сторон треугольника является диаметром описанной около него окружности. Другая сторона треугольника равна $4\sqrt{2}$, а проекция третьей стороны на диаметр равна 14. Найдите радиус окружности.

34А. В окружность радиуса $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ вписан правильный треугольник ABC .

Хорда BD пересекает сторону AC в точке E , $AE : EC = 3 : 5$. Найдите BE .

35А. Найдите основание тупоугольного равнобедренного треугольника, вписанного в окружность радиуса $4\sqrt{15}$, если расстояние от центра окружности до боковой стороны треугольника равно 15.

36А. Длина высоты, проведенной к основанию равнобедренного треугольника, равна 8, а радиус описанной окружности равен 5. Найдите площадь треугольника.

37А. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 2, а радиус описанной окружности равен 5. Найдите больший катет треугольника.

38А. Периметр прямоугольного треугольника равен 72, а радиус вписанной в него окружности – 6. Найдите диаметр описанной окружности.

39А. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

40А (ЕГЭ, 2002). Один из катетов прямоугольного треугольника равен 20, а проекция другого катета на гипотенузу равна 9. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника.

41А. В прямоугольном треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно $\frac{2}{5}$. Найдите острые углы треугольника.

42А. В прямоугольный треугольник ABC с углом A , равным 30° , вписана окружность радиуса $\sqrt{2}$. Вторая окружность, лежащая вне треугольника, касается стороны BC и продолжений двух других сторон. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

43А. В треугольнике PQR угол QRP равен 60° . Найдите расстояние между точками касания со стороной QR окружности радиуса 2, вписанной в треугольник, и окружности радиуса 3, касающейся продолжений сторон PQ и PR .

44А. Равносторонний треугольник ABC со стороной 3 вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причём хорда AD равна $\sqrt{3}$. Найдите хорды BD и CD .

45А. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , $\angle AOC = 60^\circ$. Найдите угол AMC , где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC .

46А. Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найдите радиус окружности.

47А. К окружности, вписанной в треугольник со сторонами 6, 10 и 12, проведена касательная, пересекающая две большие стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

48А. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки, равные 3 и 4, а противолежащий этой стороне угол равен 120° . Найдите площадь треугольника.

49А. В треугольник ABC вписана окружность. Точка касания окружности стороны AC делит ее на отрезки с длинами 6 и 4. Периметр треугольника равен 24. Найдите синус угла BAC .

50А. Дан треугольник ABC , для которого $AB = 5$, $BC = 8$. В треугольник вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке P . Известно, что $BP = 3$. Найдите площадь треугольника BMP , где M – точка касания окружности со стороной треугольника ABC .

51А (ЕГЭ, 2010). В треугольнике ABC $AB = 7$, $BC = 9$, $CA = 4$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 5$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найти длину отрезка EF .

52А. Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 26 и 14,5, а его высота BD равна 10. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD .

53А. Окружность описана около равностороннего треугольника ABC . На дуге BC , не содержащей точку A , расположена точка M , делящая градусную меру этой дуги в отношении 1 : 2. Найдите углы треугольника AMB .

54А. Треугольник ABC равнобедренный. Радиус OA описанного круга образует с основанием AC угол OAC , равный 20° . Найдите угол BAC .

55А. В окружность радиуса 5 вписан равнобедренный треугольник, сумма основания и высоты которого равна 16. Найдите высоту треугольника.

56А. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равна 20π . Найдите площадь этого треугольника, если его основание равно 12.

57А. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC , касается его боковых сторон AC и BC в точках M и N . Найдите AB , если $AC = 8$ и $MN = 3$.

58А. В треугольнике ABC $AB = BC = 10$, $AC = 12$. В треугольник вписана окружность. Касательная к этой окружности, параллельная высоте BD , пересекает стороны треугольника в точках F и E . Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника CFE .

59А. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные 1 и 2. Найдите основание треугольника.

60А. Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC , а вторая вписана в угол A и касается первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

ОТВЕТЫ

1А. 4. 2А. 30° или 150° . 3А. $\frac{a+b-c}{2}$. 4А. 2,5; 1; 6; 3; 2. 5А. $\frac{169}{24}$; $\frac{10}{3}$; $\frac{15}{2}$; 12; 12.
 6А. $\frac{65}{8}$; 4; $\frac{21}{2}$; 12; 14. 7А. 14. 8А. 4. 9А. 13 и 15. 10А. $\frac{3\sqrt{10}}{4}$. 11А. 126. 12А. 30. 13А. 36. 14А. 84. 15А. 90. 16А. 6. 17А. 10, 10 и 12. 18А. 3. 19А. 21. 20А. 0,75. 21А. 60. 22А. 40. 23А. 9, 12 и 15. 24А. 3 и 4. 25А. $\frac{20}{7}$ и $\frac{15}{7}$. 26А. 168.
 27А. 5. 28А. $4\sqrt{3}$. 29А. 18. 30А. 15. 31А. 98,4. 32А. 12. 33А. 8. 34А. 7. 35А. 15. 36А. 32. 37А. 8. 38А. 30. 39А. $\sqrt{5}$. 40А. 25. 41А. $\arctg \frac{3}{4}$, $\operatorname{arccctg} \frac{3}{4}$. 42А. 4.
 43А. $\sqrt{3}$. 44А. $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ или $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. 45А. 165° или 105° . 46А. $\frac{2\sqrt{510}}{15}$. 47А. 16.
 48А. $4\sqrt{3}$. 49А. 0,6 или 0,8. 50А. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ или $\frac{75\sqrt{3}}{28}$. 51А. 4,5 или 6. 52А. $5\sqrt{2}$ или $\sqrt{2}$. 53А. 40° ; 80° ; 60° или 60° ; 20° ; 100° . 54А. 35° или 55° . 55А. 6,4 или 8. 56А. 12 или 108. 57А. 4 или 12. 58А. 2,5 или $\frac{\sqrt{97}}{2}$. 59А. $\sqrt{6}$ или $\sqrt{12}$.
 60А. 3 : 2 или 1 : 2.

Уровень В

1В (ЕГЭ 2015). Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K .

а) Докажите, что отрезок BK втрое больше отрезка CK .

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N . Найдите AB , если $BK = 18$ и $BN = 17$.

2В. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке M , причем $AM = 2R$ и $CM = 3R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $R = 2$.

3В. Прямые, содержащие катеты AC и CB прямоугольного треугольника ACB , являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 2 и 4. Прямая, содержащая гипотенузу AB , является их общей внешней касательной.

а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника ACB .

б) Найдите площадь треугольника ACB .

4В. Точка B лежит на отрезке AC . Прямая, проходящая через точку A , касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K . Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D .

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC , если $AK = 3$ и $MK = 12$.

5В. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

6В (ЕГЭ 2014). Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.

а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$, а $BC = 48$.

7В (ЕГЭ 2014). Около равнобедренного треугольника ABC с основанием BC описана окружность. Через точку C провели прямую, параллельную стороне AB . Касательная к окружности, проведённая в точке B , пересекает эту прямую в точке K .

а) Докажите, что треугольник BSK — равнобедренный.

б) Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника BSK , если $\cos \angle BAC = \frac{3}{4}$.

8В. Сторона BC треугольника ABC равна 48. Около треугольника описана окружность радиуса 25. Известно, что радиус OA делит сторону BC на два равных отрезка.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите его боковые стороны.

9В. Дан треугольник со сторонами 25, 25 и 48.

- а) Докажите, что он тупоугольный.
- б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей.

10В. В треугольник ABC вписана окружность. Вторая окружность, лежащая вне треугольника, касается стороны BC и продолжений двух других сторон.

- а) Докажите, что расстояние между точками касания этих окружностей с прямой AB равно длине стороны BC .
- б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, а радиус меньшей окружности равен $\sqrt{2}$.

11В. Сторона AC треугольника ABC больше стороны AB . Вписанная в треугольник окружность касается стороны BC в точке M , а невписанная — в точке N .

- а) Докажите, что $MN = AC - AB$.
- б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если сумма их радиусов равна 24, а $MN = 10$.

12В. Стороны треугольника относятся как 2 : 3 : 3.

- а) Докажите, что точки касания вписанной и невписанной окружностей треугольника делят его большую сторону на три равных отрезка.
- б) Найдите отношение радиусов этих окружностей.

13В. Первая окружность с центром O , вписанная в равнобедренный треугольник KLM , касается боковой стороны KL в точке B , а основания ML — в точке A . Вторая окружность с центром O_1 касается основания ML и продолжений боковых сторон.

- а) Докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный.
- б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и $AK = 16$.

14В (ЕГЭ 2016). Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

- а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC .
- б) Найдите угол OIH , если $\angle ABC = 75^\circ$.

15В (ЕГЭ 2016). Окружность касается стороны AC остроугольного треугольника ABC и делит каждую из сторон AB и BC на три равные части.

- а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника делит сторону BC .

16В (ЕГЭ 2017). В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

а) Докажите, что A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H , если $BC = 2\sqrt{3}$.

17В (ЕГЭ 2017). Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет BC в точке N .

а) Докажите, что $\angle CAN = \angle CMN$.

б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ANB и CBM , если $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{4}{3}$.

18В (ЕГЭ 2017). В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. В треугольники ACH и BCH вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, касающиеся прямой CH в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямые AO_1 и CO_2 перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырёхугольника MO_1NO_2 , если $AC = 20$ и $BC = 15$.

19В. Угол BAC треугольника ABC равен α . Сторона BC является хордой окружности с центром O и радиусом R , проходящей через центр окружности, вписанной в треугольник ABC .

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABOC$ можно описать окружность.

б) Известно, что в четырёхугольник $ABOC$ можно вписать окружность. Найдите радиус r этой окружности, если $R = 6$, $\alpha = 60^\circ$.

20В. Внеписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на его основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в 4 раза больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

21В. Точка I — центр окружности S_1 , вписанной в треугольник ABC , точка O — центр окружности S_2 , описанной около треугольника BIC .

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

б) Найдите косинус угла BAC , если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как 3 : 5.

22В (ЕГЭ 2018). Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , а BH — высота этого треугольника.

- а) Докажите, что углы ABH и CBO равны.
- б) Найдите BH , если $AB = 8$, $BC = 9$, $BH = BO$.

23В. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 20$, $AC = 12$ и $BC = 16$. Точки M и N — середины сторон AB и AC соответственно.

- а) Докажите, что окружность, вписанная в треугольник ABC , касается одной из средних линий.
- б) Найдите общую хорду окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC , а вторая описана около треугольника AMN .

24В. Дан треугольник ABC со сторонами $AC = 30$, $BC = 40$ и $AB = 50$. Вписанная в него окружность с центром I касается стороны BC в точке L , M — середина BC , AP — биссектриса треугольника ABC , O — центр описанной около него окружности.

- а) Докажите, что P — середина отрезка LM .
- б) Пусть прямые OI и AC пересекаются в точке K , а продолжение биссектрисы AP пересекает описанную окружность в точке Q . Найдите площадь четырёхугольника $OKCQ$.

25В. В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O , величина угла AOC составляет 120° .

- а) Докажите, что около четырёхугольника $BDOE$ можно описать окружность.
- б) Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 4$, а $\angle BED = 75^\circ$.

26В. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN . Оказалось, что точки B , C , M и N лежат на одной окружности.

- а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN : BC = 2 : 5$, а $BN = 14$.

27В. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

- а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .
- б) Найдите радиус данной окружности, если $\angle A = 45^\circ$, $B_1C_1 = 6$ и площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

28В. В треугольник ABC вписана окружность радиуса 4, касающаяся стороны AC в точке M , причём $AM = 8$ и $CM = 12$.

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- б) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .

29В. Первая окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC , касается боковой стороны AB в точке P , а основания BC — в точке M . Вторая окружность, касающаяся основания BC и продолжений боковых сторон, касается прямой AB в точке Q .

а) Докажите, что треугольник PMQ прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если высота треугольника, проведённая из вершины A , равна 45, а точка P делит боковую сторону AB в отношении $9 : 8$, считая от вершины A .

30В (ЕГЭ 2021). Окружность с центром O , построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает гипотенузу AB в точках A и D . Касательная, проведённая к этой окружности в точке D , пересекает катет BC в точке M .

а) Докажите, что $BM = CM$.

б) Прямая DM пересекает прямую AC в точке P , прямая OM пересекает прямую BP в точке K . Найдите $BK : KP$, если $\cos \angle BAC = \frac{4}{5}$.

31В (ЕГЭ 2021). Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Окружность, описанная около треугольника ABC , пересекает боковую сторону CD в точке E , а основание AD в точке F , причём $AB = FD$.

а) Докажите, что $\angle EAD = \angle EDA$.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 5$, $BC = 3$, а прямые AE и CF перпендикулярны.

32В (ЕГЭ 2022). На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $AM : MB = CN : NB = 1 : 2$. Прямая MN касается окружности, вписанной в треугольник ABC в точке L .

а) Докажите, что $AB + BC = 5 AC$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , если $ML = 1$ и $LN = 3$.

33В (ЕГЭ 2022). Биссектриса BB_1 и высота CC_1 треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках M и N . Известно, что $\angle BCA = 85^\circ$ и $\angle ABC = 40^\circ$.

а) Докажите, что $CN = BM$.

б) Пусть MN и BC пересекаются в точке D . Найти площадь треугольника BDN , если его высота BH равна 7.

34В (ЕГЭ 2022). Точка D лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC . Точки I и J — центры окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD соответственно.

а) Докажите, что прямые BI и DJ параллельны.

б) Найдите IJ , если $AC = 16$, $\cos \angle BDC = \frac{1}{9}$.

ОТВЕТЫ

1В. 18. 2В. $\sqrt{5}$. 3В. 8. 4В. 30. 5В. 40. 6В. 25. 7В. 2. 8В. 30. 9В. $\frac{575}{14}$. 10В. 4.
11В. 26. 12В. $1:4$. 13В. 24. 14В. 165° . 15В. $5:4$. 16В. 1. 17В. $\frac{5}{4}$. 18В. $\frac{7}{2}$.
19В. $9-3\sqrt{3}$. 20В. $2:1$. 21В. $-\frac{7}{18}$. 22В. 6. 23В. $\frac{8\sqrt{21}}{5}$. 24В. 300. 25В. $2\sqrt{3}$.
26В. $\frac{70\sqrt{7}}{3}$. 27В. $3\sqrt{20-6\sqrt{2}}$. 28В. $2\sqrt{5}$. 29В. 40. 30В. $7:25$. 31В. $20\sqrt{3}$. 32В.
 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 33В. 49. 34В. $\frac{18\sqrt{5}}{5}$.