

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЙ ОТРЕЗКОВ

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 14 профильного ЕГЭ по теме «Вычисление отношений отрезков». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

Уровень А

1А. Дана четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте прямую пересечения плоскостей $AA_1 C_1$ и $BB_1 D_1$.

2А. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте прямую пересечения плоскостей $BB_1 D_1$ и ABC_1 .

3А. Дана треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, M — точка пересечения медиан основания ABC . Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и $A_1 MC_1$.

4А. Четырёхугольник $ABCD$ — основание пирамиды $SABCD$. Постройте прямую пересечения плоскостей ASB и CSD , если: а) прямые AB и CD пересекаются; б) прямые AB и CD параллельны.

5А. Основание пирамиды $SABCD$ — трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Точка M лежит на ребре SB . Постройте прямую пересечения плоскостей ADM и SBC .

6А. Дана треугольная пирамида $ABCD$, M — точка пересечения медиан грани ABC . Постройте прямую пересечения плоскости ADC с плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым AC и BD .

7А. Дана треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, M — точка, лежащая на ребре CC_1 . Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BMA_1 .

8А. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки K , L и M лежат на рёбрах AD , CD и BB_1 соответственно. Постройте прямую пересечения плоскостей KLM и $BB_1 D_1 D$.

9А. Основание пирамиды $SABCDEF$ — шестиугольник $ABCDEF$, противоположные стороны которого попарно равны и параллельны. Постройте прямую пересечения плоскостей ASD и CSF .

10А. Дана шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, основания которой — правильные шестиугольники. Точка O — центр основания $ABCDEF$, M — середина бокового ребра DD_1 . Постройте прямую пересечения плоскости $A_1 B_1 C_1$ с плоскостью, проходящей через точки O и M параллельно прямой AE .

11А. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Точка M лежит на ребре BC , причём $BM : MC = 1 : 2$. Постройте точку пересечения прямой, проходящей через точку M и середину ребра CD , с плоскостью ABD .

12А. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка M лежит на ребре AA_1 . Постройте точку пересечения прямой DM с плоскостью $A_1 B_1 C_1$.

13А. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, M — точка пересечения медиан грани ABC , точка N лежит на боковом ребре CC_1 . Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью $A_1B_1C_1$.

14А. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой — параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на боковом ребре SC . Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью ASD .

15А. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка M лежит на ребре AA_1 . Постройте точку пересечения прямой CM с плоскостью $A_1 B_1 C_1$.

16А. Дана треугольная пирамида $ABCD$, M — точка пересечения медиан грани ABC . Постройте точку пересечения прямой, проходящей через точку B и середину отрезка DM , с плоскостью ACD .

17А. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Точки K , L и M лежат на рёбрах AB , BC и CD соответственно. Постройте точку пересечения прямой KM с плоскостью ALD .

18А. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Точка M лежит на боковом ребре SD . Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью ASC .

19А. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка M лежит на ребре DD_1 . Постройте точку пересечения прямой DB_1 с плоскостью AMC .

20А. Основание пирамиды $SABCDEF$ — шестиугольник $ABCDEF$, противоположные стороны BC и EF которого параллельны. Точка M лежит на ребре SC . Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью ESF .

21А. Постройте сечение треугольной пирамиды $DABC$ плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а) B , D и середину M ребра AC ;
- б) B и середины рёбер AD и CD ;
- в) середину K ребра AD и точки L и M , лежащие на продолжениях рёбер AB и AC за точки B и C ;
- г) середины рёбер BC , AD и точку L , лежащую на продолжении ребра AC за точку C ;
- д) середины K , L и M рёбер AD , AB и BC ;
- е) A , C и точку пересечения медиан грани ABD ;
- ж) середины рёбер AD , CD и точку L , лежащую на ребре BC , если $BL : LC = 1 : 2$;
- з) K , L и M , лежащие на рёбрах AD , AB и BC соответственно, если $AK : KD = BL : LA = BM : MC = 1 : 2$;
- и) точки пересечения медиан граней ABD , BCD и ABC ;
- к) середины рёбер BC , CD и точку, лежащую на медиане DM грани ABD .

22А. Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а) середины рёбер AB , AD и AA_1 ;
- б) B , C и середину ребра $A_1 B_1$;

- в) A , C и середину ребра A_1B_1 ;
- г) середины рёбер AA_1 , AD и центр грани BB_1C_1C ;
- д) центры граней $ABCD$, AA_1B_1B и BB_1C_1C ;
- е) середины рёбер AB , BC и DD_1 ;
- ж) середины рёбер A_1B_1 , CC_1 и вершину A ;
- з) середину ребра CC_1 и точки K , L , лежащие на рёбрах AB и A_1B_1 , если $BK : KA = A_1L : LB_1 = 1 : 2$;
- и) середину ребра A_1B_1 , вершину A и точку M на ребре B_1C_1 , если $B_1M : MC_1 = 1 : 3$;
- к) середины рёбер AD , CD и A_1B_1 ;
- л) середины рёбер AB , BC и CC_1 ;
- м) вершину B_1 , центр грани $ABCD$ и середину ребра AA_1 .

23А. Постройте сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а) середину ребра AA_1 и вершины B и C_1 ;
- б) середины рёбер AA_1 , B_1C_1 и вершину B ;
- в) центры граней AA_1B_1B , BB_1C_1C и точку M ребра BC , если $CM : MB = 1 : 2$;
- г) середины рёбер AB , A_1C_1 и CC_1 ;
- д) середины рёбер AA_1 , A_1C_1 и центр основания ABC ;
- е) центр грани AA_1B_1B , середину ребра B_1C_1 и точку M ребра A_1C_1 , если $A_1M : MC_1 = 1 : 2$;
- ж) центр основания ABC и центры боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C .

24А. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а) A , B и середина ребра SD ;
- б) середины рёбер AB , BC и SC ;
- в) середины рёбер AB , BC и SD ;
- г) середины рёбер AB , AD параллельно ребру SC ;
- д) середины рёбер AD , SC и точку B ;
- е) середины рёбер AB , AD и SC ;
- ж) центр основания, середину ребра SD и точку M ребра SA , если $AM : MS = 1 : 3$;
- з) середину ребра SA и точки M и N рёбер SB и SC , если $BM : MS = SN : NC = 1 : 2$.

25А. Основание шестиугольной призмы $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а) A , B и F_1 ;
- б) A , C и D_1 ;
- в) B , E и середину ребра FF_1 ;
- г) B , D и середину ребра AA_1 ;
- д) B , C и E_1 ;
- е) B , C и середину ребра DD_1 ;
- ж) B , D и середину ребра FF_1 .

26А. Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а) C , F и середину ребра SD ;
- б) A , B и середину ребра SD ;
- в) центр основания параллельно плоскости ASB ;
- г) A , C и середину ребра SD ;
- д) B и середины рёбер AS и CS ;
- е) B , C и середину отрезка, соединяющего вершину пирамиды с центром основания.

Уровень В

1В. Точка M лежит на ребре AB треугольной пирамиды $ABCD$, причём $AM : MB = 1 : 2$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M и середины рёбер BC и AD .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро CD ?

2В. Точка M — середина ребра AD треугольной пирамиды $ABCD$. Точки K и L лежат на прямых AB и AC соответственно, причём B — середина отрезка AK , а C — середина отрезка AL .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M , K и L .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро BD ?

3В. Точки M и N — середины рёбер соответственно AB и BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M , N и D_1 .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро AA_1 ?

4В. Точка M — середина ребра CD параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M , A_1 и C_1 .

б) Пусть секущая плоскость пересекает прямую DD_1 в точке P . Найдите отношение $PD : PD_1$.

5В. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$ с центром O . Точка M лежит на отрезке SO , причём $OM : MS = 1 : 2$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AM параллельно прямой BD .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро SC ?

6В. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$ с центром O . Точка M — середина отрезка AO .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым SA и BD .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро SC ?

7В. Точки M и N — середины рёбер соответственно CC_1 и AB треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M , N и A_1 .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро BC ?

8В. Точки M и N — середины рёбер соответственно AA_1 и AB треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M , N и C_1 .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро BC ?

9В. Основания шестиугольной призмы $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники. Точка M — середина ребра AA_1 .

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки C , D и M .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро BB_1 ?

10В. Основания шестиугольной призмы $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A , B и D_1 .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро FF_1 ?

11В. Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точки M и N — середины рёбер BC и EF .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую MN параллельно ребру SA .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро SC ?

12В. Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую BF параллельно ребру SA .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро SC ?

13В. Точка M — середина ребра AD параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым BD и CB_1 .

б) В каком отношении плоскость сечения делит диагональ AC_1 параллелепипеда?

14В. Точка M — середина ребра AD параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M и B_1 параллельно прямой A_1C_1 .

б) В каком отношении плоскость сечения делит диагональ BD_1 параллелепипеда?

15В. Точки M и N — середины рёбер соответственно AB и CD треугольной пирамиды $ABCD$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку пересечения медиан треугольника ABC параллельно прямым AB и CD .

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок MN ?

16В. Точки M и N — середины рёбер соответственно AB и CD треугольной пирамиды $DABC$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AD параллельно прямым AB и CD .

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок MN ?

17В. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой параллелограмм $ABCD$. Точка M — середина ребра AB .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым AC и SB .

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок, соединяющий точку D с серединой ребра SB ?

18В. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой параллелограмм $ABCD$. Точка M — середина ребра SD .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую BM параллельно прямой AC .

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок, соединяющий точку S с центром параллелограмма $ABCD$?

19В. Точка M — середина ребра AB треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую A_1M параллельно прямой AC .

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок, соединяющий точку B_1 с серединой ребра AC ?

20В. Точки M и N — середины рёбер соответственно AC и BB_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей MNC_1 и $A_1B_1C_1$.

б) В каком отношении плоскость MNC_1 делит ребро AB ?

21В. Основания шестиугольной призмы $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники. Точка M — середина ребра CC_1 , O — центр грани $ABCDEF$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M , O и E_1 .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро EF ?

22В. Основания шестиугольной призмы $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники. Точка M — середина ребра CC_1 .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей D_1ME_1 и ABC .

б) В каком отношении плоскость D_1ME_1 делит диагональ B_1E призмы?

23В. Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точки M и N — середины рёбер SA и SC соответственно.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M , N и B .

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок, соединяющий вершину S с центром основания пирамиды?

24В. Основание шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точка M — середина ребра BC .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей FSM и ASB .

б) В каком отношении плоскость FSM делит отрезок, соединяющий точку A с серединой ребра SD ?

25В. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M — середина ребра $C_1 D_1$, а точка K делит ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 3$.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки K и M параллельно прямой BD .

б) В каком отношении плоскость сечения делит диагональ $A_1 C$?

26В. На ребрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, а $B_1 Q = 3$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки A , P и Q .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро CC_1 ?

27В. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$. Точка Q — середина ребра $A_1 B_1$, а точка P делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $1 : 2$, считая от вершины C_1 .

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A , P и Q .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро CC_1 ?

28В. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки P и Q — середины ребер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , P и Q .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро $B_1 C_1$?

29В. На ребре AA_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 4$. Точка T — середина ребра $C_1 B_1$.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки E , T и D_1 .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро BB_1 ?

30В. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребре BB_1 взята точка E так, что $B_1 E : EB = 2 : 3$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки E и C_1 параллельно прямой BD_1 .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро $A_1 B_1$?

31В (ЕГЭ 2023). Все боковые рёбра четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равны – AD стороне основания $ABCD$. Стороны AB , BC и CD вдвое меньше стороны AD .

а) Докажите, что высота пирамиды, опущенная из вершины S , проходит через середину AD .

б) В каком отношении, считая от точки S , плоскость BNM делит высоту пирамиды, если N – середина SC , а точка M делит ребро SD в отношении $1 : 3$, считая от вершины S .

32В (ЕГЭ 2023). Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. ABC – равнобедренный треугольник с основанием AB . На AB отмечена точка P такая, что $AP : PB = 3 : 1$. Точка Q середина ребра B_1C_1 . Точка M середина ребра BC . Через точку M проведена плоскость α , перпендикулярная PQ .

а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α .

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ , если $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$.

33В (ЕГЭ 2023). В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Точка P делит ребро AB в отношении $AP : PB = 1 : 3$, а точка Q – середина ребра A_1C_1 . Через середину M ребра BC провели плоскость α , перпендикулярную отрезку PQ .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок A_1C_1 , считая от точки A_1 , если известно, что $AB = AA_1$, $AB : BC = 2 : 7$.

34В (ЕГЭ 2023). У тетраэдра $ABCD$ грани ABD и ACD перпендикулярны и являются правильными треугольниками со стороной 10. На рёбрах AB , AD и CD взяли точки K , L и M соответственно так, что $BK = 2$, $AL = 4$ и $DM = 3$.

а) Докажите, что плоскость KLM перпендикулярна ребру CD .

б) Найдите длину отрезка, образованного пересечением плоскости KLM с гранью ABC .

ОТВЕТЫ

1В. $1 : 2$. 2В. $1 : 2$. 3В. $1 : 2$. 4В. $1 : 2$. 5В. $1 : 1$. 6В. $1 : 3$. 7В. $1 : 2$. 8В. $1 : 2$.
9В. $1 : 3$. 10В. $1 : 1$. 11В. $1 : 2$. 12В. $1 : 2$. 13В. $1 : 5$. 14В. $3 : 4$. 15В. $1 : 2$. 16В.
 $1 : 1$. 17В. $3 : 1$. 18В. $1 : 2$. 19В. $1 : 2$. 20В. $1 : 2$. 21В. $1 : 2$. 22В. $1 : 1$. 23В. $1 : 2$.
24В. $6 : 5$. 25В. $3 : 5$. 26В. $1 : 1$. 27В. $1 : 1$. 28В. $1 : 2$. 29В. $3 : 11$. 30В. $1 : 2$.
31В. $1 : 2$. 32В. $16 : 25$. 33В. $1 : 2$. 34В. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.