

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 14 профильного ЕГЭ по теме «Расстояние между скрещивающимися прямыми». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

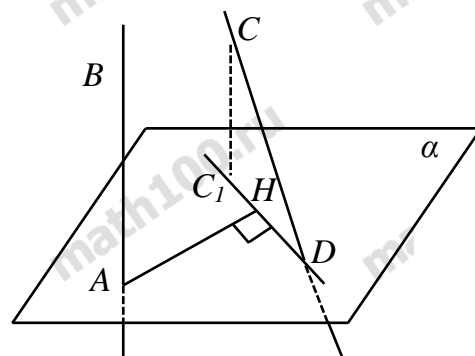
Расстояние между скрещивающимися прямыми. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра. Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми можно воспользоваться одним из приведенных ниже четырех способов.

1) Построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный обеим) и найти его длину.

2) Построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости.

3) Заключить данные прямые в параллельные плоскости, проходящие через данные скрещивающиеся прямые, и найти расстояние между этими плоскостями.

4) Построить плоскость α , перпендикулярную одной из данных прямых AB , и построить на этой плоскости ортогональную проекцию C_1D второй прямой CD . Тогда искомое расстояние это расстояние от точки A до прямой C_1D , т.е. длина отрезка AH .



5) Воспользоваться формулой для объема тетраэдра: $V = \frac{1}{6} abh \sin \alpha$, где V – объем тетраэдра, a и b – длины его противолежащих ребер, h – расстояние между прямыми, содержащими эти ребра, α – угол между этими прямыми.

Уровень А

1А. Дан единичный куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите расстояния между прямыми: а) BC и AA_1 ; б) B_1B и AC_1 ; в) AB_1 и BC_1 .

2А. Ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равны 1. Точки K , M и N — середины ребер BD , AB и AC соответственно. Найдите расстояния между прямыми: а) BD и AC ; б) KM и AC ; в) AB и KN ; г) DM и BC .

3А. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Все ребра пирамиды равны 1, K — середина бокового ребра SD . Найдите расстояния между прямыми: а) SB и AC ; б) SA и BC ; в) AD и SC ; г) SB и CK .

4А. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Точка K — середина AC . Найдите расстояния между прямыми: а) CC_1 и AB ; б) AB и CB_1 ; в) AB_1 и BC_1 ; г) BK и AC_1 .

5А. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1. Найдите расстояния между прямыми: а) AE_1 и DB_1 ; б) BB_1 и EF_1 ; в) AA_1 и CF_1 ; г) AB_1 и CD_1 ; д) BE и DB_1 .

6А. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Сторона основания равна 1, боковое ребро равно 2. Найдите расстояния между прямыми: а) SB и AF ; б) SB и AE ; в) SB и DF ; г) SB и AD .

ОТВЕТЫ

1А. а) 1; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2А.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; г) $\frac{\sqrt{22}}{11}$. **3А.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; г) $\frac{1}{2}$. **4А.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **5А.** а) 1; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; д) $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **6А.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{2\sqrt{39}}{13}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; г) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Уровень В

1В. В кубе $ABCD A_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60° .

б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1 .

2В. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S .

а) Постройте её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно прямым SA и BC .

б) Найдите расстояние между прямыми AB и SC , если сторона основания равна 30, а боковое ребро равно $5\sqrt{34}$.

3В. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$.

а) Докажите, что прямые BD_1 и AC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если стороны основания параллелепипеда равны 3, а боковые рёбра равны 6.

4В. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине A , а боковая грань AA_1C_1C — квадрат.

а) Докажите, что прямые CB_1 и AC_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $AC = 2$, $AB_1 = 2\sqrt{3}$.

5В. Основание пирамиды $SABCD$ — ромб $ABCD$ с углом 60° при вершине A . Боковое ребро SD перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания.

- Докажите, что прямые AC и SB перпендикулярны.
- Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{2}$.

6В. Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — ромб $ABCD$ с углом 120° при вершине D , а боковые грани призмы — квадраты.

- Докажите, что прямые $A_1 C$ и BD перпендикулярны.
- Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания призмы равна $8\sqrt{3}$.

7В. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB , соответственно, а NT — высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD .

- Докажите, что точка T является серединой SM .
- Найдите расстояние между NT и SC .

8В. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 12, боковое ребро $PA = 12\sqrt{2}$. Через вершину A проведена плоскость α , перпендикулярная прямой PC и пересекающая ребро PC в точке K .

- Докажите, что плоскость α делит высоту PH пирамиды $PABCD$ в отношении $2 : 1$, считая от вершины P .
- Найдите расстояние между прямыми PH и BK .

9В. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Грань $ACC_1 A_1$ является квадратом.

- Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 4$, $BC = 7$.

10В. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все рёбра равны 2. Точка M — середина ребра AA_1 .

- Докажите, что прямые MB и $B_1 C$ перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми MB и $B_1 C$.

11В. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания.

- Докажите, что плоскости ASD и CSD перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми SC и BD , если сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$.

12В. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания, а треугольник BSD равносторонний.

- а) Докажите, что высота пирамиды равна стороне основания.
- б) Найдите расстояние между прямыми SC и BD , если сторона основания равна $2\sqrt{3}$.

13В. Основание пирамиды $DABC$ — треугольник ABC со сторонами $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$. Все боковые рёбра равны.

- а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину отрезка AB .
- б) Найдите расстояние между прямыми DM и BC , где DM — высота пирамиды $DABC$.

14В. Основание пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB . Все боковые рёбра образуют равные углы плоскостью основания.

- а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину отрезка AB .
- б) Известно, что $AB = 18$, $AC = 6$. Найдите расстояние между прямыми DM и CH , где DM — высота пирамиды $DABC$, CH — высота треугольника ABC .

15В. Боковая грань правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S образует с плоскостью основания угол 45° . Точка M — середина бокового ребра SD .

- а) Докажите, что противоположные боковые грани пирамиды перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние между прямыми AB и CM , если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{2}$.

16В. Боковая грань правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S образует с плоскостью основания угол 60° . Точка M — середина бокового ребра SD .

- а) Докажите, что плоскости AMB и CSD перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние между прямыми AB и CM , если сторона основания пирамиды равна $4\sqrt{3}$.

17В. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- а) Постройте точку пересечения прямой AC_1 с плоскостью $BA_1 D$.
- б) Найдите расстояние между прямыми BA_1 и CB_1 , если параллелепипед прямоугольный, $AA_1 = \sqrt{5}$, $AB = BC = 2\sqrt{10}$.

18В. Точки M и N — середины рёбер соответственно AD и AB куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- а) Докажите, что косинус угла между прямыми $D_1 M$ и $A_1 N$ равен $\frac{4}{5}$.
- б) Найдите расстояние между этими прямыми, если ребро куба равно 6.

19В. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Точка M — середина бокового ребра CS .

- Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью ESF .
- Найдите расстояние между прямыми BM и EF , если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{6}$, а высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$.

20В. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$. Точка P — середина бокового ребра CC_1 .

- Постройте точку пересечения прямой BP с плоскостью $AA_1 F$.
- Найдите расстояние между прямыми BP и AB_1 , если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно $2\sqrt{3}$.

21В. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$, боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания, $BC = 2SA$. Точка M — середина ребра AB .

- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую SM параллельно BD , — равносторонний треугольник.
- Найдите расстояние между прямыми SM и BD , если $AB = 6\sqrt{3}$.

22В. Основание пирамиды $ABCD$ — равносторонний треугольник ABC , боковое ребро AD перпендикулярно плоскости основания, $AD : BC = 1 : \sqrt{2}$. Точки M и N — середины рёбер BC и AB соответственно.

- Докажите, что угол между прямыми AM и DN равен 60° .
- Найдите расстояние между этими прямыми, если $AB = 6\sqrt{2}$.

23В. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Его основания $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ — квадраты. Отрезок, соединяющий центр основания $ABCD$ с серединой ребра $B_1 C_1$, перпендикулярен основаниям.

- Докажите, что грани $AA_1 B_1 B$ и $ABCD$ перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC , если все рёбра параллелепипеда равны 2.

24В. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Его основания $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ — квадраты. Отрезок, соединяющий вершину C с центром основания $A_1 B_1 C_1 D_1$, перпендикулярен основаниям.

- Докажите, что прямые CC_1 и BD перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми $A_1 C$ и AB , если сторона основания параллелепипеда равна 6, а боковое ребро равно $\sqrt{34}$.

25В. (ЕГЭ 2019) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 5, а боковое ребро SA равно 3. На ребрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причем $AK : KB = SM : MC = 1 : 4$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA .

- Докажите, что плоскость α делит ребро AC в отношении $1 : 4$, считая от вершины A .
- Найдите расстояние между прямыми SA и KM .

26В. (ЕГЭ 2021) В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что точка A_1 — середина отрезка AD . На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что точка C_1 — середина отрезка B_1E .

- а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE , если $AB = 4$, $AA_1 = 1$.

27В. (ЕГЭ 2022) Вне плоскости равностороннего треугольника ABC отмечена точка D , причем $\cos \angle DAB = \cos \angle DAC = 0,2$.

- а) Докажите, что прямые AD и BC перпендикулярны
б) Найдите расстояние между прямыми AD и BC , если известно, что $AB = 2$.

28В. (ЕГЭ 2022) В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ отмечены середины M и N отрезков AB и AD соответственно.

- а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $B_1N = 3\sqrt{5}$.

29В. (ЕГЭ 2022) Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ со стороной 10. Известно, что $SA = SC = 10\sqrt{2}$, $SB = 20$, $AC = 10$.

- а) Докажите, что ребро SD перпендикулярно плоскости основания пирамиды $SABCD$.
б) Найдите расстояние между прямыми AC и SB .

ОТВЕТЫ

- 1В. $2\sqrt{3}$. 2В. 24. 3В. $\sqrt{3}$. 4В. 1. 5В. 1. 6В. 6. 7В. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. 8В. $\frac{6\sqrt{10}}{5}$. 9В. $\frac{14\sqrt{2}}{9}$.
10В. $\frac{\sqrt{30}}{5}$. 11В. 1. 12В. $\sqrt{2}$. 13В. 3. 14В. 7. 15В. 1. 16В. 6. 17В. 2. 18В. 4.
19В. 6. 20В. 3. 21В. 3. 22В. 2. 23В. $\sqrt{3}$. 24В. 4,8. 25В. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. 26В. $\frac{8\sqrt{3}}{7}$. 27В.
 $\frac{\sqrt{71}}{5}$. 28В. 2. 29В. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.