

## ОТНОШЕНИЕ ОТРЕЗКОВ И ПЛОЩАДЕЙ

Многие задачи этого раздела будут решаться с помощью теоремы о пропорциональных отрезках (обобщенной теоремы Фалеса), либо с помощью дополнительных построений, которые приводят к нескольким парам подобных треугольников. Рассмотрим примеры на эти дополнительные построения.

**Пример 1.** На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  расположена точка  $M$ , причем  $AM : MC = 1 : 2$ . Точка  $K$  находится на отрезке  $BM$ , причем  $BK : KM = 3 : 2$ . В каком отношении прямая  $AK$  делит сторону  $BC$ ?

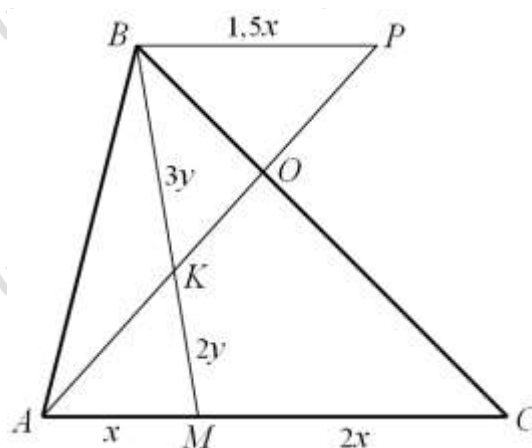
**Решение.** Через точку  $B$  проведем прямую, параллельную стороне  $AC$ . Пусть прямая  $AK$  пересекает ее в точке  $P$ , а сторону  $BC$  в точке  $O$ . Для удобства введем обозначения:  $AM = x$ ,  $MK = 2y$ , тогда  $MC = 2x$ ,  $BK = 3y$ . Треугольники  $AKM$  и  $BKP$  подобны по двум углам:  $\angle KAM = \angle KPB$  (как накрест лежащие),  $\angle AKM = \angle BKP$  (как вертикальные). Тогда:

$$\frac{BP}{AM} = \frac{BK}{KM}, \text{ откуда } \frac{BP}{x} = \frac{3y}{2y}.$$

Следовательно,  $BP = 1,5x$ . Треугольники  $AOC$  и  $BOP$  подобны по двум углам:  $\angle OAC = \angle OPB$  (как накрест лежащие),  $\angle AOC = \angle BOP$  (как вертикальные).

$$\text{Тогда: } \frac{BP}{AC} = \frac{BO}{OC}, \text{ откуда } \frac{1,5x}{3x} = \frac{BO}{OC}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{BO}{OC} = \frac{1}{2}.$$



**Пример 2.** На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$ , причем  $AM : MB = 1 : 2$ ,  $AN : NB = 2 : 1$ , а на стороне  $BC$  точки  $E$  и  $F$ , причем  $BE : EC = 1 : 4$ ,  $BF : FC = 3 : 2$ . Отрезки  $ME$  и  $FN$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите отношение  $NO : OF$ .

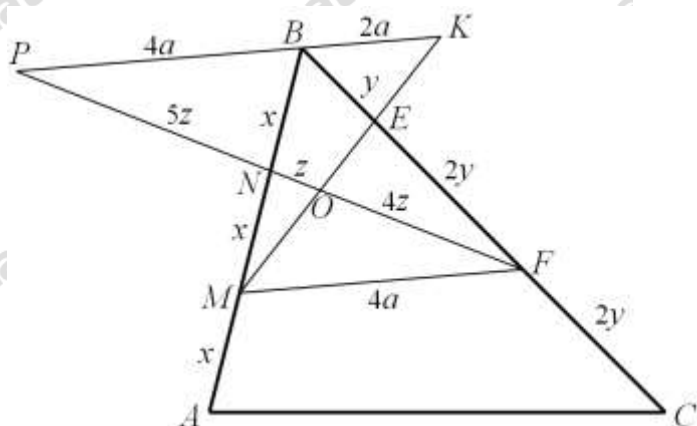
**Решение.** Через точку  $B$  проведем прямую, параллельную стороне  $MF$ . Пусть прямая  $FN$  пересекает ее в точке  $P$ , а прямая  $ME$  в точке  $K$ . Для удобства введем обозначения:  $AM = MN = NB = x$ ,  $BE = y$ , тогда  $EF = FC = 2y$ . Треугольники  $BEK$  и  $FEM$  подобны по двум углам:  $\angle EMF = \angle EKB$  (как накрест лежащие),  $\angle BEK = \angle MEF$  (как

вертикальные). Тогда:  $\frac{BK}{MF} = \frac{BE}{EF}$ ,

$$\text{откуда } \frac{BK}{MF} = \frac{y}{2y}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{BK}{MF} = \frac{1}{2}.$$

Пусть  $BK = 2a$ , тогда  $MF = 4a$ . Треугольники  $PBN$  и  $MNF$  равны по стороне и прилежащим к



ней углам:  $MN = NB = x$ ,  $\angle NMF = \angle NBP$  (как накрест лежащие),  $\angle MNF = \angle BNP$  (как вертикальные). Тогда  $PB = MF = 4a$  и  $PN = NF = 5z$ . Треугольники  $POK$  и  $MOF$  подобны по двум углам:  $\angle OMF = \angle OKB$  (как накрест лежащие),  $\angle MOF = \angle POK$  (как вертикальные). Тогда:  $\frac{PK}{MF} = \frac{PO}{OF}$ , откуда  $\frac{PO}{OF} = \frac{6a}{4a}$ .

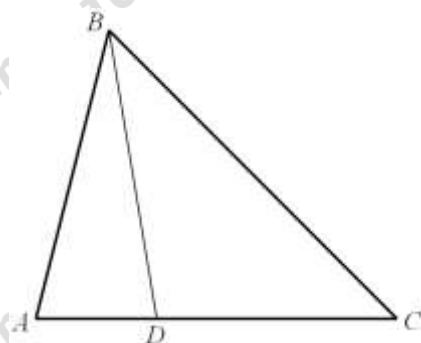
Следовательно,  $\frac{PO}{OF} = \frac{6}{4}$ . Так как  $PO + OF = PN + NF = 5z + 5z = 10z$ , то  $PO = 6z$ , а  $OF = 4z$ . Тогда  $NO = FN - OF = 5z - 4z = z$  и  $NO : OF = 1 : 4$ .

При решении задач на отношение площадей следует использовать следующие утверждения:

1) если точка  $D$  лежит на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ , то площади треугольников  $ABD$  и  $CBD$  пропорциональны отрезкам  $AD$  и  $DC$ , т.е.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{AD}{DC}.$$

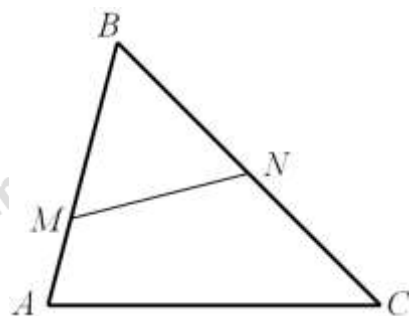
Это утверждение следует из формулы площади треугольника по стороне и опущенной на неё высоте: у треугольников  $ABD$  и  $CBD$  общая высота, опущенная из общей вершины  $B$ ;



2) если прямая пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  (или их продолжения) в точках  $M$  и  $N$  соответственно, то

$$\frac{S_{MBN}}{S_{ABC}} = \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC}.$$

Это утверждение следует из формулы площади треугольника по двум сторонам и углу между ними: у треугольников  $MBN$  и  $ABC$  углы при общей вершине  $B$  либо равны, либо в сумме составляют  $180^\circ$ ;



3) отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

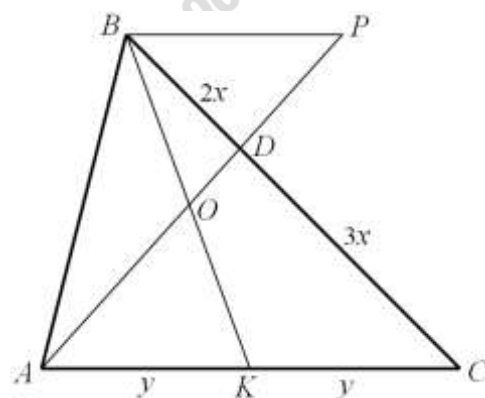
**Пример 3.** На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $K$  и  $D$  так, что  $AK = KC$ ,  $BD : DC = 2 : 3$ . Отрезки  $BK$  и  $AD$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите отношение площади четырехугольника  $KODC$  к площади треугольника  $ABC$ .

**Решение.** Сначала выясним в каком отношении точка  $O$  делит отрезок  $BK$ . Для этого через точку  $B$  проведем прямую параллельно прямой  $AC$ . Пусть прямая  $AD$  пересекает её в точке  $P$ . Обозначим:  $AK = KC = y$ ,  $BD = 2x$ , тогда  $DC = 3x$ . Треугольники  $BDP$  и  $ADC$  подобны по двум углам:  $\angle DAC = \angle DPB$  (как накрест лежащие),  $\angle ADC = \angle BDP$  (как вертикальные). Тогда:  $\frac{BP}{AC} = \frac{BD}{DC}$ , откуда

$\frac{BP}{2y} = \frac{2x}{3x}$ . Следовательно,  $BP = \frac{4}{3}y$ . Треугольники  $AOK$  и  $BOP$  подобны по двум углам:  $\angle OAK = \angle BOP$  (как накрест лежащие),  $\angle AOK = \angle BOP$  (как вертикальные).

Тогда:  $\frac{BP}{AK} = \frac{BO}{OK}$ , откуда  $\frac{BO}{OK} = \frac{\frac{4}{3}y}{y}$ .

Следовательно,  $BO : OK = 4 : 3$ . Пусть площадь треугольника  $ABC$  равна  $S$ . Тогда  $S_{ABK} = \frac{S}{2}$  (так как  $AK = KC$ ),  $S_{AOK} = \frac{3}{7} S_{ABK} = \frac{3}{7} \cdot \frac{S}{2} = \frac{3}{14} S$  (так как  $OK : BK = 3 : 7$ ) и  $S_{ADC} = \frac{3}{5} S_{ABC} = \frac{3}{5} S$  (так как



$DC : BC = 3 : 5$ ). Следовательно,  $S_{KODC} = S_{ADC} - S_{AOK} = \frac{3}{5} S - \frac{3}{14} S = \frac{27}{70} S$ . Таким образом,  $S_{KODC} : S_{ABC} = 27 : 70$ .

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 17 профильного ЕГЭ по теме «Отношение отрезков и площадей». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

### Уровень А

**1А.** Высота  $CD$  треугольника  $ABC$  делит медиану  $BM$  в отношении  $3 : 1$ , считая от вершины  $B$ . В каком отношении  $CD$  делит сторону  $AB$ , считая от вершины  $A$ ?

**2А.**  $M$  и  $P$  – середины смежных сторон  $AD$  и  $DC$  параллелограмма  $ABCD$ .  $MC$  и  $BP$  пересекаются в точке  $K$ . Найдите отношение  $BK : KP$ .

**3А.** В треугольнике  $ABC$   $A_1$  лежит на стороне  $BC$  и  $BA_1 : A_1C = 1 : 3$ ,  $C_1$  – середина  $AB$ . Найдите отношение  $AK : KA_1$ , где  $K$  – точка пересечения  $AA_1$  и  $CC_1$ .

**4А.** Дан треугольник  $ABC$ . На продолжении стороны  $AC$  за точку  $C$  взята точка  $N$ , причём  $AC = 2CN$ . Точка  $M$  находится на стороне  $BC$ , причём  $BM : MC = 1 : 3$ . В каком отношении прямая  $MN$  делит сторону  $AB$ ?

**5А.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  так, что  $AM : MB = 2 : 3$ ,  $BN : NC = 1 : 2$ ,  $AK : KC = 2 : 1$ . В каком отношении прямая  $MK$  делит отрезок  $AN$ ?

**6А.** На медиане  $AM$  треугольника  $ABC$  взята точка  $K$ , причём  $AK : KM = 1 : 3$ . Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку  $K$  параллельно стороне  $AC$ , делит сторону  $BC$ .

**7А.** Через середину  $M$  медианы  $CD$  треугольника  $ABC$  проведена прямая  $AM$ , пересекающая сторону  $BC$  в точке  $K$ . В каком отношении точка  $K$  делит сторону  $BC$ ?

**8А.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = BC$ ) на стороне  $BC$  выбрана точка  $D$  так, что  $BD : DC = 1 : 4$ . В каком отношении прямая  $AD$  делит высоту  $BM$  треугольника  $ABC$ ?

**9А.** На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $K$  и  $N$  так, что  $CK : KA = 2 : 3$ ,  $CN : NB = 4 : 3$ . В каком отношении точка пересечения отрезков  $AN$  и  $BK$  делит отрезок  $KB$ ?

**10А.** Через точку  $D$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  такую, что  $AD : DB = m : n$ , параллельно стороне  $AC$  проведена прямая, пересекающая сторону  $BC$  в точке  $E$ . Найдите отношение  $DE : AC$ .

**11А.** Дан треугольник  $ABC$ . На продолжении стороны  $AC$  за точку  $C$  взята точка  $N$ , причём  $CN = AC$ ; точка  $K$  — середина стороны  $AB$ . В каком отношении прямая  $KN$  делит сторону  $BC$ ?

**12А.** На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  и на продолжении стороны  $AB$  за вершину  $B$  расположены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причём  $BM : MC = 4 : 5$  и  $BK : AB = 1 : 5$ . Прямая  $KM$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $N$ . Найдите отношение  $CN : AN$ .

**13А.** На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  расположены точки  $K$  и  $L$ , причём  $AK : KB = 4 : 7$  и  $AL : LC = 3 : 2$ . Прямая  $KL$  пересекает продолжение стороны  $BC$  в точке  $M$ . Найдите отношение  $CM : BC$ .

**14А.** На сторонах  $AB$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  расположены точки  $N$  и  $M$  соответственно, причём  $AN : NB = 3 : 2$ ,  $BM : MC = 2 : 5$ . Прямые  $AM$  и  $DN$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите отношения  $OM : OA$  и  $ON : OD$ .

**15А.** На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  расположены точки  $N$  и  $M$  соответственно, причём  $AN : NB = 3 : 2$ ,  $AM : MC = 4 : 5$ . Прямые  $BM$  и  $CN$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите отношения  $OM : OB$  и  $ON : OC$ .

**16А.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = BC$ ) на стороне  $BC$  взята точка  $D$  так, что  $BD : DC = 1 : 4$ . В каком отношении прямая  $AD$  делит высоту  $BE$  треугольника  $ABC$ , считая от вершины  $B$ ?

**17А.** На медиане  $AA_1$  треугольника  $ABC$  взята точка  $M$ , причём  $AM : MA_1 = 1 : 3$ . В каком отношении прямая  $BM$  делит сторону  $AC$ ?

**18А.** Точки  $A_1$  и  $C_1$  расположены на сторонах  $BC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ . Отрезки  $AA_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $M$ . В каком отношении прямая  $BM$  делит сторону  $AC$ , если  $AC_1 : C_1B = 2 : 3$  и  $BA_1 : A_1C = 1 : 2$ ?

**19А.** В треугольнике  $ABC$  точка  $K$  лежит на стороне  $AC$ , причём  $AK : KC = 2 : 3$ . Точка  $M$  делит сторону  $AB$  на два отрезка, один из которых вдвое больше другого. Прямая, проходящая через точку  $M$  параллельно  $BC$ , пересекает прямую  $BK$  в точке  $P$ . Найти отношение  $BP : KP$ .

**20А (ЕГЭ 2011).** Через вершину  $A$  правильного шестиугольника  $ABCDEF$  проведена прямая, пересекающая прямую  $CF$  в точке  $K$ . Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как  $1 : 8$ . Найдите отношение  $CK : KF$ .



**21А.** Через вершину  $C$  правильного шестиугольника  $ABCDEF$  проведена прямая, пересекающая прямую  $AD$  в точке  $Q$ . Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как  $5 : 13$ . Найдите отношение  $AQ : QD$ .

**22А.** В треугольнике  $ABC$  биссектриса  $AD$  делит сторону  $BC$  в отношении  $BD : DC = 2 : 1$ . В каком отношении медиана  $CE$  делит эту биссектрису?

**23А.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $K$ ,  $L$  и  $M$ , причём  $AK : KB = 2 : 3$ ,  $BL : LC = 1 : 2$ ,  $CM : MA = 3 : 1$ . В каком отношении отрезок  $KL$  делит отрезок  $BM$ ?

**24А.** В треугольнике  $ABC$ , площадь которого равна 6, на стороне  $AB$  взята точка  $K$ , делящая эту сторону в отношении  $AK : BK = 2 : 3$ , а на стороне  $AC$  взята точка  $L$ , делящая  $AC$  в отношении  $AL : LC = 5 : 3$ . Точка  $Q$  пересечения прямых  $CK$  и  $BL$  отстоит от прямой  $AB$  на расстояние 1,5. Найдите сторону  $AB$ .

**25А.** Около окружности описана равнобедренная трапеция  $ABCD$ . Боковые стороны  $AB$  и  $CD$  касаются окружности в точках  $M$  и  $N$ ,  $K$  — середина  $AD$ . В каком отношении прямая  $BK$  делит отрезок  $MN$ ?

**26А.** Около окружности описана равнобедренная трапеция  $ABCD$ . Боковая сторона  $AB$  касается окружности в точке  $M$ , а основание  $AD$  — в точке  $N$ . Отрезки  $MN$  и  $AC$  пересекаются в точке  $P$ , причём  $NP : PM = 2$ . Найдите отношение  $AD : BC$ .

**27А.** Найдите площадь треугольника, вершины которого — середины сторон треугольника площади 4.

**28А.** Точки  $M$  и  $N$  расположены на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ , а точка  $K$  — на стороне  $AC$ , причём  $BM : MN : NC = 1 : 1 : 2$  и  $CK : AK = 1 : 4$ . Известно, что площадь треугольника  $ABC$  равна 20. Найдите площадь четырёхугольника  $AMNK$ .

**29А.** На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $M$  и  $N$ , причём  $AM : MN : NB = 2 : 2 : 1$ , а на стороне  $AC$  — точка  $K$ , причём  $AK : KC = 1 : 2$ . Найдите площадь треугольника  $MNK$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна 15.

**30А.** Через точки  $M$  и  $N$ , делящие сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  на три равные части, проведены прямые, параллельные стороне  $BC$ . Найдите площадь части треугольника, заключённой между этими прямыми, если площадь треугольника  $ABC$  равна 3.

**31А.** Сторона треугольника равна 36. Прямая, параллельная этой стороне, делит площадь треугольника пополам. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого между сторонами треугольника.

**32А.** Из середины основания треугольника площади 2 проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите площадь полученного таким образом параллелограмма.

**33А.** В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  взята точка  $B_1$  так, что  $AB_1 : B_1B = 1 : 1$ , а на стороне  $AC$  взята точка  $C_1$  так, что  $AC_1 : C_1C = 3 : 1$ . Найдите отношение площадей треугольников  $AB_1C_1$  и  $ABC$ .

**34А.** Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции с ее основаниями, равны 4 и 25. Найдите площадь данной трапеции.

**35А.** В треугольнике  $ABC$  проведена прямая, параллельная  $AC$  и пересекающая стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Прямая  $EF$  делит треугольник  $ABC$  на две фигуры, площади которых относятся как  $1 : 3$ . Найдите отношение длин отрезков  $AC$  и  $EF$ .

**36А.** На стороне  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  выбрана точка  $E$ , делящая эту сторону в отношении  $3 : 4$ . Отрезок  $DE$  пересекает диагональ  $AC$  в точке  $F$ . Какую часть площади параллелограмма  $ABCD$  составляет площадь треугольника  $AFD$ ?

**37А.** В треугольнике  $ABC$  на медиане  $BM$  взята точка  $K$  так, что  $BK : KM = 1 : 2$ . Найдите отношение площадей треугольников  $ABK$  и  $ABC$ .

**38А.** Площадь трапеции делится диагональю в отношении  $3 : 7$ . В каком отношении она делится средней линией, считая от меньшего основания?

**39А.** В прямоугольнике  $ABCD$  точка  $K$  делит сторону  $AB$  в отношении  $AK : KB = 3 : 4$ , а точка  $M$  делит сторону  $CD$  в отношении  $DM : MC = 5 : 3$ . В каком отношении  $KM$  делит площадь прямоугольника?

**40А.** В треугольнике  $ABC$  точки  $K$  и  $N$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно. Через точку  $B$  проведена прямая, которая пересекает  $AC$  в точке  $F$ , а  $KN$  – в точке  $L$  так, что  $KL : LN = 3 : 2$ . Определите площадь четырехугольника  $AKLF$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна 40.

**41А.** В прямоугольном треугольнике катеты относятся, как  $3 : 4$ , а высота проведенная к гипотенузе, делит площадь треугольника на части, разность которых равна 84. Найдите площадь всего треугольника.

**42А.** В треугольнике  $ABC$  через основание  $D$  высоты  $BD$  проведена прямая, параллельная стороне  $AB$ , пересекающая сторону  $BC$  в точке  $K$ . Найдите отношение  $BK : KC$ , если площадь треугольника  $BDK$  составляет  $\frac{3}{16}$  площади треугольника  $ABC$ .

**43А.** Из точки на основании треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Они разбивают треугольник на параллелограмм и два треугольника с площадями 4 и 9. Найдите площадь параллелограмма.

**44А.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $CF$  и  $AD$ . Найдите отношение площадей треугольников  $AFD$  и  $ABC$ , если  $AB : AC : BC = 21 : 28 : 20$ .

**45А.** Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Вся трапеция разделена ими на три части. Найдите площадь средней части, если площади крайних равны 2 и 6.

**46А.** Четырёхугольник разделён диагоналями на четыре треугольника. Площади трёх из них равны 10, 20 и 30, и каждая меньше площади четвёртого треугольника. Найдите площадь данного четырёхугольника.

**47А.** Площадь трапеции  $ABCD$  равна 90. Точка  $P$  — середина боковой стороны  $AB$ . Точка  $R$  на стороне  $CD$  выбрана так, что  $2CD = 3RD$ . Прямые  $AR$  и  $PD$  пересекаются в точке  $Q$ . Найдите площадь треугольника  $APQ$ , если  $AD = 2BC$ .

**48А.** В трапеции  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) диагонали пересекаются в точке  $M$ ,  $BC = 2$ ,  $AD = 4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABM$  к площади трапеции  $ABCD$ .

**49А.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  боковые стороны  $BC$  и  $AC$  в два раза больше основания  $AB$ . Биссектрисы углов при основании пересекаются в точке  $M$ . Какую часть треугольника  $ABC$  составляет площадь треугольника  $AMB$ ?

**50А.** В прямоугольном треугольнике синус меньшего угла равен  $\frac{1}{3}$ . Перпендикулярно гипотенузе проведена прямая, разбивающая треугольник на две равновеликие части. В каком отношении эта прямая делит гипотенузу?

**51А.** На сторонах  $AB$  и  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что прямые  $MC$  и  $NC$  разбивают параллелограмм на три равновеликие части. Найдите  $MN$ , если  $BD = 3$ .

**52А.** В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $45^\circ$ , а угол  $C$  острый. Из середины стороны  $BC$  опущен перпендикуляр  $NM$  на сторону  $AC$ . Площади треугольников  $NMC$  и  $ABC$  относятся как  $1 : 8$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

**53А.** В треугольнике  $ABC$  из точки  $E$  стороны  $BC$  проведена прямая, параллельная высоте  $BD$  и пересекающая сторону  $AC$  в точке  $F$ . Отрезок  $EF$  делит треугольник  $ABC$  на две равновеликие фигуры. Найдите  $EF$ , если  $BD = 6$ ,  $AD : DC = 2 : 7$ .

## ОТВЕТЫ

1А. 2 : 3. 2А. 4 : 1. 3А. 4 : 3. 4А. 1 : 9. 5А. 6 : 7. 6А. 1 : 7. 7А. 2 : 1. 8А. 2 : 1.  
9А. 4 : 5. 10А.  $n : (n + m)$ . 11А. 2 : 1. 12А. 5 : 24. 13А. 8 : 13. 14А. 20 : 21; 6 : 35.  
15А. 5 : 6; 8 : 25. 16А. 1 : 2. 17А. 1 : 6. 18А. 1 : 3. 19А. 10 : 1 или 5 : 4. 20А. 4 : 1  
или 1 : 5. 21А. 2 : 1 или 1 : 3. 22А. 3 : 1. 23А. 1 : 1. 24А. 4. 25А. 1 : 3. 26А. 3 : 1.  
27А. 1. 28А. 13. 29А. 2. 30А. 1. 31А.  $18\sqrt{2}$ . 32А. 1. 33А. 3 : 8. 34А. 49. 35А.  
2 : 1 или  $2 : \sqrt{3}$ . 36А. 7 : 20 или 7 : 22. 37А. 1 : 6. 38А. 2 : 3. 39А. 59 : 53. 40А. 9.  
41А. 300. 42А. 3 : 1 или 1 : 3. 43А. 12. 44А. 1 : 4. 45А. 4. 46А. 120. 47А. 10.  
48А. 2 : 9. 49А.  $\frac{1}{5}$ . 50А. 2 : 1. 51А. 1. 52А.  $45^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $90^\circ$ . 53А.  $\frac{9\sqrt{14}}{7}$ .

**Уровень В**

**1В.** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $M$  — середина стороны  $AD$ ,  $P$  — точка пересечения отрезка  $BM$  с диагональю  $AC$ .

- а) Докажите, что прямая  $DP$  проходит через середину стороны  $AB$ .
- б) Биссектриса угла  $BAC$  пересекает отрезок  $BM$  в точке  $Q$ . Найдите отношение  $PM : BQ$ , если  $AB : AC = 1 : 3$ .

**2В.** На катете  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$  и с углом  $30^\circ$  при вершине  $A$  вне треугольника построен равносторонний треугольник  $BCD$ . Прямая  $AD$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ .

- а) Докажите, что  $CK : KB = 1 : 2$ .
- б) Прямая, проходящая через точку  $K$  перпендикулярно  $CD$ , пересекает гипотенузу  $AB$  в точке  $M$ . Найдите отношение  $AM : MB$ .

**3В.** Биссектриса  $AD$  треугольника  $ABC$  делит его медиану  $BM$  пополам.

- а) Докажите, что площадь треугольника  $ACD$  вдвое больше площади треугольника  $ABD$ .

б) В каком отношении медиана  $BM$  делит биссектрису  $AD$ ?

**4В.** Точка  $M$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ , причём  $CM : MB = 1 : 2$ . Биссектриса  $CK$  перпендикулярна прямой  $AM$ .

- а) Докажите, что площадь треугольника  $ACK$  втрое меньше площади треугольника  $BCK$ .

б) В каком отношении прямая  $AM$  делит биссектрису  $CK$ ?

**5В (ЕГЭ 2016).** Дана трапеция  $ABCD$  с боковой стороной  $AB$ , которая перпендикулярна основаниям. Из точки  $A$  на сторону  $CD$  опущен перпендикуляр  $AH$ . На стороне  $AB$  взята точка  $E$  так, что прямые  $CE$  и  $CD$  перпендикулярны.

- а) Доказать, что прямые  $BH$  и  $ED$  параллельны.

б) Найти отношение  $BH$  к  $ED$ , если  $\angle BCD = 135^\circ$ .

**6В (ЕГЭ 2016).** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AK$  и  $CM$ . На них из точек  $M$  и  $K$  опущены перпендикуляры  $ME$  и  $KH$  соответственно.

- а) Докажите, что прямые  $EH$  и  $AC$  параллельны.

б) Найдите отношение  $EH$  и  $AC$ , если  $\angle ABC = 45^\circ$ .

**7В (ЕГЭ 2018).** Точка  $E$  — середина стороны  $BC$  квадрата  $ABCD$ . Серединные перпендикуляры к отрезкам  $AE$  и  $EC$  пересекаются в точке  $O$ .

- а) Докажите, что  $\angle AOE = 90^\circ$ .

б) Найдите  $BO : OD$ .



**8В (ЕГЭ 2017).** Точка  $E$  — середина боковой стороны  $CD$  трапеции  $ABCD$ . На стороне  $AB$  взяли точку  $K$ , так, что прямые  $CK$  и  $AE$  параллельны. Отрезки  $CK$  и  $BE$  пересекаются в точке  $O$ .

а) Докажите, что  $CO = KO$ .

б) Найти отношение оснований трапеции  $BC$  и  $AD$ , если площадь треугольника  $BSK$  составляет 0,09 площади трапеции  $ABCD$ .

**9В.** На основаниях  $AD$  и  $BC$  трапеции  $ABCD$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно, а на боковых сторонах  $AB$  и  $CD$  — точки  $K$  и  $L$  соответственно. При этом  $DM : AM = CN : BN = BK : AK = CL : LD = 1 : 2$ .

а) Докажите, что четырёхугольник  $KMLN$  — трапеция.

б) Известно, что  $AD = 3BC$ . В каком отношении диагональ  $BD$  трапеции  $ABCD$  делит боковые стороны трапеции  $KMLN$ ?

**10В.** На сторонах  $AD$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  взяты соответственно точки  $M$  и  $N$ , причём  $M$  — середина  $AD$ , а  $BN : NC = 1 : 3$ .

а) Докажите, что прямые  $AN$  и  $AC$  делят отрезок  $BM$  на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, образованного пересечениями прямых  $AN$ ,  $AC$ ,  $BD$  и  $BC$ , если площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 40.

**11В** Через точку пересечения  $O$  диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках  $M$  и  $N$ .

а) Докажите, что  $O$  — середина отрезка  $MN$ .

б) Найдите основания, если известно, что одно из них втрое больше другого, а  $MN = 6$ .

**12В.** Точка пересечения биссектрис углов при большем основании трапеции лежит на меньшем основании.

а) Докажите, что меньшее основание равно сумме боковых сторон.

б) Найдите углы трапеции, если отношение оснований трапеции равно  $3 : 2$ , а отношение боковых сторон равно  $5 : 3$ .

**13В.** Биссектриса угла  $C$  трапеции  $ABCD$  пересекает основание  $AD$  в точке  $M$ .

а) Докажите, что биссектриса угла  $D$  проходит через середину отрезка  $CM$ .

б) Найдите отношение  $BC : AD$ , если  $AD \perp AB$ ,  $AM : MD = 1 : 2$ ,  $AB : CD = 4 : 5$ .

**14В.** Внеписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в пять раз больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

**15В.** Пусть  $O_1$  — центр вписанной окружности равнобедренного треугольника  $ABC$ , а  $O_2$  — центр внеписанной окружности, касающейся основания  $BC$ .

а) Докажите, что расстояние от середины отрезка  $O_1O_2$  до точки  $C$  вдвое меньше  $O_1O_2$ .

б) Известно, что радиус первой окружности в пять раз меньше радиуса второй. В каком отношении точка касания первой окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

**16В.** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Биссектриса угла  $ADC$  проходит через середину боковой стороны  $AB$ .

а) Докажите, что сумма оснований трапеции равна боковой стороне  $CD$ .

б) Найдите площадь трапеции  $ABCD$ , если  $AB = 8$ ,  $BC = 2$  и  $CD = 10$ .

**17В.** В треугольнике  $ABC$  точка  $D$  делит сторону  $AB$  пополам, а точка  $E$  лежит на стороне  $BC$ , причём отрезок  $BE$  в 3 раза меньше стороны  $BC$ . Отрезки  $AE$  и  $CD$  пересекаются в точке  $O$ ,  $AE = 5$ ,  $OC = 4$ .

а) Докажите, что  $CD = AE$ .

б) Найдите сторону  $AB$ , если  $\angle AOC = 120^\circ$ .

**18В.** На отрезке  $BD$  взята точка  $C$ . Биссектриса  $BL$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$  является боковой стороной равнобедренного треугольника  $BLD$  с основанием  $BD$ .

а) Докажите, что треугольник  $DCL$  равнобедренный.

б) Известно, что  $\cos \angle ABC = 1/3$ . В каком отношении прямая  $DL$  делит сторону  $AB$ ?

**19В.** На отрезке  $CD$  взята точка  $B$ . Биссектриса  $CK$  треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$  является боковой стороной равнобедренного треугольника  $CKD$  с основанием  $CD$ , а  $BK = BD$ .

а) Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.

б) Известно, что  $\angle BAC = 2 \arcsin \frac{1}{8}$ . В каком отношении прямая  $DK$  делит сторону  $AC$ ?

**20В.** На каждой стороне равностороннего треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках соответственно перпендикулярны сторонам исходного треугольника.

а) Докажите, что треугольник с вершинами в указанных точках также равносторонний.

б) Найдите отношение площади этого треугольника к площади исходного.

**21В.** Точки  $B_1$  и  $C_1$  лежат на сторонах соответственно  $AC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ , причём  $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$ . Прямые  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ .

- а) Докажите, что прямая  $AO$  делит пополам сторону  $BC$ .
- б) Найдите отношение площади четырёхугольника  $AB_1OC_1$  к площади треугольника  $ABC$ , если  $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 2$ .

**22В (ЕГЭ 2014).** В остроугольном треугольнике  $ABC$  провели высоту  $BH$ , из точки  $H$  на стороны  $AB$  и  $BC$  опустили перпендикуляры  $HK$  и  $HM$  соответственно.

- а) Докажите, что треугольник  $MBK$  подобен треугольнику  $ABC$ .
- б) Найдите отношение площади треугольника  $MBK$  к площади четырёхугольника  $AKMC$ , если  $BH = 2$ , а радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$  равен 4.

**23В.** На сторонах  $AD$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  взяты соответственно точки  $M$  и  $N$ , причём  $M$  — середина  $AD$ , а  $BN : NC = 1 : 3$ .

- а) Докажите, что прямые  $AN$  и  $AC$  делят отрезок  $BM$  на три равные части.
- б) Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого находятся в точках  $C$ ,  $N$  и точках пересечения прямой  $BM$  с прямыми  $AN$  и  $AC$ , если площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 48.

**24В.** Точка  $M$  — середина стороны  $AD$  параллелограмма  $ABCD$ . Из вершины  $A$  проведены два луча, которые разбивают отрезок  $BM$  на три равные части.

- а) Докажите, что один из лучей содержит диагональ параллелограмма.
- б) Найдите площадь четырёхугольника, ограниченного двумя проведёнными лучами и прямыми  $BD$  и  $BC$ , если площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 40.

**25В (ЕГЭ 2016).** В трапеции  $ABCD$  точка  $E$  — середина основания  $AD$ , точка  $M$  — середина боковой стороны  $AB$ . Отрезки  $CE$  и  $DM$  пересекаются в точке  $O$ .

- а) Докажите, что площади четырёхугольника  $AMOE$  и треугольника  $COD$  равны.
- б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника  $AMOE$ , если  $BC = 3$ ,  $AD = 4$ .

**26В (ЕГЭ 2016).** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  точки  $M$  и  $N$  — середины гипотенузы  $AB$  и катета  $BC$  соответственно. Биссектриса угла  $BAC$  пересекает прямую  $MN$  в точке  $L$ .

- а) Докажите, что треугольники  $AML$  и  $BLC$  подобны.
- б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если  $\cos \angle BAC = \frac{7}{25}$ .

**27В.** Точки  $B_1$  и  $C_1$  лежат на сторонах соответственно  $AC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ , причём  $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$ . Прямые  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ .

а) Докажите, что прямая  $AO$  делит пополам сторону  $BC$ .

б) Найдите отношение площади четырёхугольника  $AB_1OC_1$  к площади треугольника  $ABC$ , если известно, что  $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$ .

**28В.** На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок  $AB$  в точке  $D$ . При этом  $\angle ABC = \angle ACD$ .

а) Докажите, что прямая  $CD$  разбивает треугольник  $ABC$  на два подобных треугольника.

б) Найдите отношение площадей этих подобных треугольников, если  $AC = 15$ ,  $BC = 20$ .

**29В.** На диагонали  $BD$  параллелограмма  $ABCD$  отмечены точки  $P$  и  $Q$ , причём  $BP = PQ = QD$ .

а) Докажите, что прямые  $AP$  и  $AQ$  проходят через середины  $M$  и  $N$  сторон  $BC$  и  $CD$  соответственно.

б) Найдите отношение площади пятиугольника  $CMPQN$  к площади параллелограмма  $ABCD$ .

**30В.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  отмечены точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  соответственно, причём  $\frac{AK}{KB} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MD} = \frac{DN}{NA}$ .

а) Докажите, что четырёхугольник  $KLMN$  — параллелограмм, а его центр совпадает с центром параллелограмма  $ABCD$ .

б) Найдите отношение площадей параллелограммов  $KLMN$  и  $ABCD$ , если  $AK : KB = 2$ .

**31В.** Вершины ромба расположены (по одной) на сторонах параллелограмма.

а) Докажите, что центры ромба и параллелограмма совпадают.

б) Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма, а диагонали параллелограмма относятся как  $2 : 3$ .

**32В.** Около окружности описана равнобедренная трапеция.

а) Докажите, что её диагональ проходит через середину отрезка, концы которого — точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции.

б) Найдите отношение оснований трапеции, если площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет  $\frac{3}{8}$  площади трапеции.



**33В.** Окружность с центром  $O$  вписана в равнобедренную трапецию  $ABCD$  с основаниями  $AD > BC$ .

- а) Докажите, что прямая  $BO$  делит площадь трапеции пополам.
- б) Пусть  $M$  и  $N$  — точки касания окружности со боковыми сторонами трапеции. В каком отношении прямая  $MN$  делит площадь трапеции, если  $AD = 2BC$ ?

**34В.** Диагонали  $AC$  и  $BD$  четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Треугольники  $AOB$  и  $COD$  равновелики.

- а) Докажите, что  $BC \parallel AD$ .
- б) Найдите площади треугольников, на которые диагонали разбивают четырёхугольник  $ABCD$ , если его площадь равна 27,  $BC = 8$ ,  $AD = 16$ .

**35В.** Диагонали  $AC$  и  $BD$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $S_{\triangle AOB}^2 = S_{\triangle BOC} \cdot S_{\triangle AOD}$ .

- а) Докажите, что  $BC \parallel AD$ .
- б) Найдите отношение  $BC : AD$ , если площадь треугольника  $COD$  составляет  $\frac{6}{25}$  площади четырёхугольника  $ABCD$ , а  $BC < AD$ .

**36В.** Вершины  $A$  и  $D$  четырёхугольника  $ABCD$  соединены с серединой  $M$  стороны  $BC$ , а вершины  $B$  и  $C$  — с серединой  $N$  стороны  $AD$ .

- а) Докажите, что если середины отрезков  $AM$ ,  $DM$ ,  $BN$ ,  $CN$  не лежат на одной прямой, то четырёхугольник с вершинами в этих серединах — параллелограмм.
- б) Найдите площадь этого параллелограмма, если известно, что  $AD = 6$ ,  $BC = 8$ , а угол между прямыми  $BC$  и  $AD$  равен  $30^\circ$ .

**37В.** Диагонали выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ . В треугольники  $APB$ ,  $BPC$ ,  $CPD$  и  $APD$  вписаны окружности с центрами  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  и  $O_4$  соответственно.

- а) Докажите, что прямые  $O_1O_3$  и  $O_2O_4$  перпендикулярны.
- б) Пусть прямая  $O_1O_3$  пересекает стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Найдите отношение площадей треугольников  $CPN$  и  $DPN$ , если около четырёхугольника  $ABCD$  можно описать окружность и  $AM : MB = 1 : 2$ .

**38В.** Вершины  $A$  и  $D$  четырёхугольника  $ABCD$  соединены с серединой  $M$  стороны  $BC$ , а вершины  $B$  и  $C$  — с серединой  $N$  стороны  $AD$ . Точки  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  — середины отрезков  $AM$ ,  $CN$ ,  $DM$ ,  $BN$  соответственно.

- а) Докажите, что прямые  $EG$ ,  $FH$  и  $MN$  пересекаются в одной точке.
- б) Найдите стороны четырёхугольника  $EFGH$ , если  $BC = 20$ ,  $AD = 48$  и  $BC \perp AD$ .

**39В.** Площадь трапеции  $ABCD$  равна 30. Точка  $P$  — середина боковой стороны  $AB$ . Точка  $R$  на боковой стороне  $CD$  выбрана так, что  $2CD = 3RD$ . Прямые  $AR$  и  $PD$  пересекаются в точке  $Q$ ,  $AD = 2BC$ .

а) Докажите, что точка  $Q$  — середина отрезка  $AR$

б) Найдите площадь треугольника  $APQ$ .

**40В (ЕГЭ 2022).** На стороне острого угла с вершиной  $A$  отмечена точка  $B$ . Из точки  $B$  на биссектрису и другую сторону угла опущены перпендикуляры  $BC$  и  $BD$  соответственно.

а) Докажите, что  $AC^2 + CD^2 = AD^2 + DB^2$ .

б) Прямые  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $T$ . Найдите отношение  $AT : TC$ , если  $\cos \angle ABC = \frac{3}{8}$ .

**41В (ЕГЭ 2022).** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ , которые пересекаются в точке  $H$ . Через точку  $C_1$  провели прямую, параллельную  $BB_1$ . Данная прямая пересекает  $AA_1$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что  $AB \cdot HK = C_1H \cdot BC$ .

б) Найдите отношение площадей треугольников  $ABC$  и  $C_1HK$ , если известно, что  $AB = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $AC = \sqrt{31}$ .

**42В (ЕГЭ 2022).** В треугольнике  $ABC$  на стороне  $BC$  отметили точку  $D$  так, что  $AB = BD$ . Биссектриса  $BF$  пересекает  $AD$  в точке  $E$ . Из точки  $C$  на прямую  $AD$  опущен перпендикуляр  $CK$ .

а) Докажите, что  $AB : BC = AE : EK$ .

б) Найдите отношение площади треугольника  $ABE$  к площади четырёхугольника  $CDEF$ , если известно, что  $BD : DC = 3 : 2$ .

**43В (ЕГЭ 2023).** Дана равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Биссектрисы углов  $BAD$  и  $BCD$  пересекаются в точке  $O$ . На боковых сторонах  $AB$  и  $CD$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $AM = MO$ ,  $CN = NO$ .

а) Докажите, точки  $M$ ,  $N$  и  $O$  лежат на одной прямой.

б) Найдите  $AM : MB$ , если известно, что  $AO = OC$  и  $BC : AD = 1 : 7$ .

**44В (ЕГЭ 2023).** Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . На стороне  $AC$  выбрана точка  $M$ , серединный перпендикуляр к отрезку  $BM$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$ , а сторону  $BC$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что угол  $AEM$  равен углу  $CMK$ .

б) Найдите отношение площадей треугольников  $AEM$  и  $CMK$ , если  $AM : CM = 1 : 4$ .

**ОТВЕТЫ**

**1B.** 1 : 1. **2B.** 5 : 1. **3B.** 3 : 1. **4B.** 2 : 1. **5B.** 1 : 2. **6B.** 1 : 2. **7B.** 3 : 1. **8B.** 3 : 7.  
**9B.** 2 : 3. **10B.** 9. **11B.** 4; 12. **12B.**  $90^\circ$ ;  $90^\circ$ ;  $\arcsin \frac{3}{5}$ ;  $180^\circ - \arcsin \frac{3}{5}$ . **13B.** 3 : 5.  
**14B.** 1 : 3. **15B.** 1 : 2. **16B.** 40. **17B.**  $2\sqrt{7}$ . **18B.** 9 : 16. **19B.** 16 : 9. **20B.** 1 : 3.  
**21B.** 1 : 6. **22B.** 1 : 15. **23B.** 14. **24B.** 9. **25B.** 2 : 9. **26B.** 25 : 36. **27B.** 1 : 15. **28B.**  
9 : 16. **29B.** 1 : 3. **30B.** 5 : 9. **31B.** 12 : 25. **32B.** 3 : 1. **33B.** 7 : 20. **34B.** 3; 12; 6; 6.  
**35B.** 2 : 3. **36B.** 3. **37B.** 2 : 1. **38B.** 13; 13; 13; 13. **39B.**  $\frac{10}{3}$ . **40B.** 46 : 9. **41B.**  
75 : 4. **42B.** 12 : 13. **43B.** 1 : 2. **44B.** 4 : 9.