

ОБЪЕМ МНОГОГРАННИКА

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 14 профильного ЕГЭ по теме «Объем многогранника». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

Объем призмы: $V = S \cdot H$, где S – площадь основания; H – длина высоты призмы.

Объем прямоугольного параллелепипеда: $V = abc$, где a, b, c – длины ребер, выходящих из одной вершины.

Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} S H$, где S – площадь основания; H – длина высоты пирамиды.

Объем произвольного тетраэдра: $V = \frac{1}{6} ab d \sin \varphi$, где a и b – длины двух противоположных ребер тетраэдра, d и φ – расстояние и угол между ними соответственно.

Следует помнить: 1) Если у пирамиды все боковые ребра равны между собой или наклонены под одним и тем же углом к плоскости основания, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам основания пирамиды).

2) Если у пирамиды боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в основание (эта же точка служит точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды).

Объем усеченной пирамиды: $V = \frac{1}{3} H \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} \right)$, где H – высота усеченной пирамиды; S_1 и S_2 – площади ее оснований.

Объемы пирамид с общей высотой пропорциональны площадям их оснований.

Объемы пирамид с равновеликими основаниями пропорциональны проведенным к ним высотам.

Пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами – равновелики.

Замечание. Если два тела подобные с коэффициентом подобия k , то отношение площадей поверхностей этих тел равно k^2 , а отношение объемов k^3 .

Уровень А

1А. Основание пирамиды $ABCD$ – равнобедренный треугольник ABC с основанием $AB = 12$ и боковой стороной 10. Найти объем пирамиды, если все боковые грани образуют с плоскостью основания двугранные углы в 45° .

2А. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины ребер AB и BC и вершину S . Найдите объемы частей, на которые пирамида разбивается этим сечением, если все ребра пирамиды равны 8.

3А. Площадь основания пирамиды равна 16, объем пирамиды равен 64. Проведены две плоскости, параллельные основанию пирамиды. Площади получившихся сечений равны 1 и 9. Найти объем части пирамиды, расположенной между плоскостями.

4А. Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 24. Найдите:

- а) объем пирамиды $BCDB_1$;
- б) объем треугольной пирамиды, отсекаемой от параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершины A , C и середину ребра BB_1 ;
- в) объем пирамиды $BDA_1 C_1$;
- г) объемы частей, на которые параллелепипед разбивается плоскостью, проходящей через вершины A , C и середину ребра $A_1 D_1$.

5А. Объем треугольной пирамиды $DABC$ равен 24. Найдите:

- а) объемы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через точки A , D и середину ребра BC ;
- б) объемы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через вершину D и середины ребер AB и BC ;
- в) объемы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через середины ребер AB , BC и BD ;
- г) объем пирамиды, вершины которой — A , B и середины ребер AC и BD ;
- д) объемы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через середины ребер AB , BC и AD .

6А. Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Объем пирамиды равен 24. Найдите объемы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через:

- а) середины ребер SA , SB и SC ;
- б) вершину S и середины ребер AB и BC ;
- в) точки A , C и середину ребра SB ;
- г) точку A и середину ребра SC параллельно прямой BD ;
- д)* точки A , B и середину ребра SD .

7А. Объем треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 24. Найдите:

- а) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины A , C и B_1 ;
- б) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершину C_1 и середины рёбер AC и BC ;
- в) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины A , B и середину ребра A_1C_1 ;
- г) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины C , A_1 и середину ребра BB_1 .

8А. Основания $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ шестиугольной призмы $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники. Объем призмы равен 36. Найдите:

- а) объем пятиугольной призмы $ABCDE A_1B_1C_1D_1E_1$;
- б) объем пирамиды $BCED_1$;
- в) объем пирамиды A_1BDF ;
- г) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины A , C и D_1 .

9А. Основание $ABCDEF$ шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник. Объем пирамиды равен 24. Найдите:

- а) объем четырёхугольной пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через точки A , S и середину ребра DE ;
- б) объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра SA параллельно диагоналям AD и CE основания;
- в) объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через точки B , D и середину ребра SC .

ОТВЕТЫ

1А. 48. **2А.** $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{224\sqrt{2}}{3}$. **3А.** 26. **4А.** а) 4; б) 2; в) 8; г) 7 и 17. **5А.** а) 12 и 12; б) 6 и 18; в) 3 и 21; г) 6; д) 12 и 12. **6А.** а) 3 и 21; б) 3 и 21; в) 6 и 18; г) 8 и 16; д) 9 и 15. **7А.** а) 8 и 16; б) 2 и 22; в) 14 и 10; г) 12 и 12. **8А.** а) 30; б) 4; в) 6; г) 18 и 18. **9А.** а) 8; б) 3; в) 2.

Уровень В

1В. В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при ребрах AD и BC равны, $AB = BD = DC = AC = 5$.

- а) Докажите, что $AD = BC$.
- б) Найдите объем пирамиды, если двугранные углы равны при рёбрах AD и BC равны 60° .

2В. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5 : 1$, считая от точки C .

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

3В. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1 P : P B_1 = 1 : 2$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

4В. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 2$, $CN = 1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.

б) Найдите объём тетраэдра $MNB B_1$.

5В. Есть правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$ со стороной основания 12 и высотой 3. Точка K — середина BC , точка L лежит на стороне $A_1 B_1$ так, что $B_1 L = 5$. Точка M — середина $A_1 C_1$. Через точки K и L проведена плоскость таким образом, что она параллельна прямой AC .

а) Доказать, что указанная выше плоскость перпендикулярна прямой MB .

б) Найти объём пирамиды с вершиной в точке B и у которой основанием является сечение призмы плоскостью.

6В. На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : BM = CN : NB = 1 : 2$. Точки P и Q — середины сторон DA и DC соответственно.

а) Докажите, что P , Q , M и N лежат в плоскости.

б)* Найти отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

7В. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 6. Точки K , L и M — центры граней $ABCD$, $AA_1 D_1 D$ и $CC_1 D_1 D$ соответственно.

а) Докажите, что $B_1 KLM$ — правильная пирамида.

б) Найдите объём $B_1 KLM$.

8В. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.

а) Докажите, что треугольник BA_1C_1 прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды AA_1C_1B .

9В. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида с вершиной S . Точка M расположена на SD так, что $SM : SD = 2 : 3$. P — середина ребра AD , а Q — середина ребра BC .

а) Доказать, что сечение пирамиды плоскостью MPQ — равнобедренная трапеция.

б) Найдите отношение объемов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

10В. Дана пирамида $PABCD$, в основании — трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90° , а плоскости PAB и PCD перпендикулярны основанию, прямые AB и CD пересекаются в точке K .

а) Доказать, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD .

б) Найдите объем $PKBC$, если $AB = BC = CD = 2$, а $PK = 12$.

11В. В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка S . Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды $PABC$.

12В. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите объем призмы, если $A_1C = BD = 2$.

13В. В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые ребра: $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы SM треугольника ABC . Эта высота равна 12.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите объем пирамиды $SABC$.

14В. Диагональ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 13, а диагонали двух соседних граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$.

а) Докажите, что треугольник $AC_1 D_1$ прямоугольный.

б) Найдите объем параллелепипеда.

15B. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $4\sqrt{2}$ и образует с боковыми гранями углы 30° и 45° .

- а) Докажите, что одна из этих граней — квадрат.
- б) Найдите объем параллелепипеда.

16B. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна 6, а площадь сечения, проходящего через ребро AB и середину бокового ребра CD , равна $6\sqrt{6}$.

- а) Докажите, что плоскость сечения образует с плоскостью основания угол 45° .
- б) Найдите объем пирамиды $ABCD$.

17B. Сторона основания $ABCDEF$ правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 4, а площадь сечения, проходящего через прямую CF и середину бокового ребра SD , равна $10\sqrt{3}$.

- а) Докажите, что плоскость сечения образует с плоскостью основания угол 60° .
- б) Найдите объем пирамиды $SABCDEF$.

18B. Точки M и N — середины ребер соответственно CC_1 и B_1C_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$.

- а) Докажите, что плоскость BA_1M делит отрезок AN в отношении $4 : 3$, считая от точки A .
- б) В каком отношении плоскость BA_1M делит объем призмы?

19B. Точка P — середина медианы BK основания ABC треугольной пирамиды $ABCD$.

- а) Докажите, что плоскость α , проходящая через точку B и середины ребер AD и CD , делит отрезок DP в отношении $2 : 1$, считая от вершины D .
- б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости α , если объем пирамиды $ABCD$ равен 16, а площадь её сечения плоскостью α равна 3.

20B. Высота SH правильной треугольной пирамиды $SABC$ относится к высоте основания ABC как $4 : 9$. Плоскость α проходит через ребро AB и делит пополам двугранный угол пирамиды при этом ребре.

- а) Докажите, что плоскость α делит высоту пирамиды в отношении $3 : 5$, считая от точки H .
- б) Найдите объем меньшей из частей, на которые пирамида разбивается плоскостью α , если сторона основания пирамиды равна 6.

21B. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Апофема пирамиды вдвое больше стороны основания. Плоскость α проходит через ребро AB и делит пополам двугранный угол пирамиды при этом ребре.

- а) Докажите, что плоскость α делит высоту пирамиды в отношении $4 : 1$, считая от вершины S .
- б) Найдите объем большей из частей, на которые пирамида разбивается плоскостью α , если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{15}$.

22В. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На лучах AB , AD и AA_1 отмечены точки K , L и M соответственно, причём $AK = \frac{5}{2} AB$, $AL = \frac{5}{2} AD$ и $AM = \frac{5}{2} AA_1$.

- а) Докажите, что плоскость KLM делит ребро $B_1 C_1$ пополам.
- б) В каком отношении плоскость KLM делит объём параллелепипеда?

23В. На диагонали BD_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка M , причём $BM : MD_1 = 1 : 3$. Через точку M проведена плоскость α , параллельная прямым AB_1 и CB_1 .

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро AB в отношении $1 : 3$, считая от вершины A .
- б) В каком отношении плоскость α делит объём параллелепипеда?

24В. Точка M — середина ребра $B_1 C_1$ правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ с основаниями ABC и $A_1 B_1 C_1$. Прямые BA_1 и CB_1 перпендикулярны.

- а) Докажите, что треугольник BMA_1 равнобедренный.
- б) Найдите объём призмы, если расстояние между прямыми BA_1 и CB_1 равно 2.

25В. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ грань $ABCD$ — квадрат. Точка M лежит на ребре BC , причём $CM : MB = 1 : 2$. Известно, что диагональ DB_1 параллелепипеда перпендикулярна отрезку $C_1 M$.

- а) Докажите, что угол между прямой CB_1 и плоскостью $A_1 B_1 C_1$ равен 30° .
- б) Найдите объём параллелепипеда, если расстояние между прямыми DB_1 и $C_1 M$ равно $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

26В. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведена плоскость α , перпендикулярная этому ребру. Известно, что она пересекает остальные боковые рёбра и разбивает пирамиду на два многогранника, объёмы которых относятся как 1 к 3.

- а) Докажите, что плоский угол при вершине пирамиды равен 45° .
- б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α , если боковое ребро пирамиды равно 4.

27В. В правильной треугольной усеченной пирамиде $ABCA_1 B_1 C_1$ площадь нижнего основания ABC в девять раз больше площади меньшего основания $A_1 B_1 C_1$. Через ребро AB проведена плоскость α , которая пересекает ребро CC_1 в точке N и делит пирамиду на два многогранника равного объёма.

- а) Докажите, что точка N делит ребро CC_1 в отношении $5 : 13$, считая от вершины C_1 .
- б) Найдите площадь сечения усеченной пирамиды плоскостью α , если высота этой пирамиды равна 13, а ребро меньшего основания равно 3.

28В. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 6, а боковое ребро SA равно 5. На ребрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причем $AM = 2$, $SK = 1$.

- а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC .
- б) Найдите объем пирамиды $BCKM$.

29В. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ из точки B опущен перпендикуляр BH на плоскость SAD .

- а) Докажите, что $\angle AHC = 90^\circ$.
- б) Найдите объем пирамиды, если $HA = \sqrt{2}$ и $HC = 4$.

30В (ЕГЭ 2022). Дана треугольная пирамида $SABC$. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка CH — высоты треугольника ABC .

- а) Докажите, что $AC^2 - BC^2 = AS^2 - BS^2$;
- б) Найдите объем пирамиды $SABC$, если $AB = 25$; $AC = 10$; $BC = 5\sqrt{13}$; $SC = 3\sqrt{10}$.

31В (ЕГЭ 2022). В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N так, что $BN : ND_1 = 1 : 2$. Точка O — середина отрезка CB_1 .

- а) Докажите, что прямая NO проходит через точку A .
- б) Найдите объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{2}$.

32В (ЕГЭ 2022). В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC равными 8 и 3 соответственно. Точки M и N лежат на ребрах SD и BC соответственно, причём $SM : MD = 3 : 2$, $BN : NC = 1 : 2$. Плоскость AMN пересекает ребро SC в точке K .

- а) Докажите, что $SK : KC = 6 : 1$.
- б) Плоскость AMN делит пирамиду $SABCD$ на два многогранника. Найдите отношение их объемов.

33В (ЕГЭ 2022). В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N , что $BN : ND_1 = 1 : 2$. Точка O — середина отрезка CB_1 .

- а) Докажите, что прямая NO проходит через точку A .
- б) Найдите объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{6}$.

34В (ЕГЭ 2022). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка M – середина бокового ребра SC , точка N лежит на стороне основания BC . Плоскость α проходит через точки M и N параллельно боковому ребру SA .

а) Плоскость α пересекает ребро SD в точке L . Докажите, что $BN : NC = DL : LS$.

б) Пусть $BN : NC = 1 : 2$. Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость α разбивает пирамиду.

35В (ЕГЭ 2023). Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K, L, M, N лежат на рёбрах AC, AD, DB и BC соответственно, так, что четырёхугольник $KLMN$ квадрат со стороной 2, $AK : KC = 2 : 3$.

а) Докажите, что $BM : MD = 2 : 3$;

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости $KLMN$, если объём тетраэдра $ABCD$ равен 25.

36В (ЕГЭ 2023). Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K, L, M и N лежат на ребрах AC, AD, DB и BC соответственно, так, что четырёхугольник $KLMN$ — квадрат, и $AK : KC = 3 : 7$.

а) Докажите, что $AB : CD = 3 : 7$;

б) Найдите объём пирамиды $CKLMN$, если объём тетраэдра $ABCD$ равен 100.

37В (ЕГЭ 2023). В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с углом 60° при вершине A . На рёбрах $A_1 B_1, B_1 C_1$ и BC отмечены точки M, K и N соответственно так, что четырёхугольник $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 4.

а) Докажите, что точка M – середина ребра $A_1 B_1$.

б) Найдите высоту призмы, если её объём равен 16 и известно, что точка K делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $B_1 K : KC_1 = 1 : 3$.

ОТВЕТЫ

1В. $\frac{10\sqrt{15}}{3}$. 2В. $\frac{2750\sqrt{3}}{3}$. 3В. $\frac{1075}{9}$. 4В. $18\sqrt{3}$. 5В. $\frac{33\sqrt{3}}{2}$. 6В. $13 : 23$. 7В. 18.

8В. $20\sqrt{14}$. 9В. $2 : 7$. 10В. 4. 11В. 90. 12В. $\frac{4\sqrt{6}}{5}$. 13В. 96. 14В. 144. 15В. 32.

16В. 36. 17В. $48\sqrt{3}$. 18В. $1 : 1$. 19В. 4. 20В. $\frac{30}{7}$. 21В. $\frac{125}{6}$. 22В. $1 : 47$. 23В.

$9 : 119$. 24В. 36. 25В. $\frac{8}{9}$. 26В. $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. 27В. 48,5. 28В. $\frac{16\sqrt{7}}{5}$. 29В.

$\frac{9\sqrt{14}}{4}$. 30В. 225. 31В. $24\sqrt{3}$. 32В. $146 : 239$. 33В. 216. 34В. $5 : 13$. 35В. 5,4.

36В. 29,4. 37В. $\sqrt{3}$.