

## ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД: ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ В СИСТЕМЕ $Oxy$

Ещё одним основным методом решений заданий с параметрами является графический метод. В этом разделе рассмотрим задачи для решения которых потребуется построить график некоторой функции на плоскости  $(x; y)$ , при этом в большинстве случаев придется прибегнуть к элементарным преобразованиям заданных функций. На плоскости  $(x; y)$  функция  $y = f(x; a)$  задает семейство кривых, зависящих от параметра  $a$ . Естественно, для решения задач этого раздела, необходимо знать и уметь строить графики основных элементарных функций. Напомним основные способы преобразования элементарных функций, которые потребуется для построения их графиков.

**Четные и нечетные функции.** Функция  $y = f(x)$  называется *четной*, если  $f(-x) = f(x)$  и *нечетной*, если  $f(-x) = -f(x)$ . График четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной относительно начала координат.

**Периодические функции.** Если функция  $y = f(x)$  периодическая и имеет период  $T$ , то функция  $y = Af(kx + b)$ , где  $A$ ,  $k$  и  $b$  постоянны, а  $k \neq 0$ , также периодическая, причем ее период равен  $\frac{T}{|k|}$ . Период алгебраической суммы периодических функций равен наименьшему общему кратному периодов всех слагаемых.

**График функции  $y = f(x + a)$**  получается из графика функции  $y = f(x)$  с помощью параллельного переноса (сдвига) последнего вдоль оси  $Ox$  на  $|a|$  единиц масштаба влево, если  $a > 0$  и вправо если  $a < 0$ .

**График функции  $y = f(x) + a$**  получается из графика функции  $y = f(x)$  с помощью параллельного переноса (сдвига) последнего вдоль оси  $Oy$  на  $|a|$  единиц масштаба вверх, если  $a > 0$  и вниз если  $a < 0$ .

**График функции  $y = f(kx)$**  получаем из графика функции  $y = f(x)$  с помощью сжатия по оси абсцисс исходного графика пропорционально коэффициенту  $k$  при аргументе (если  $k > 1$ , то график сжимается в  $k$  раз, а если  $0 < k < 1$ , то график растягивается в  $\frac{1}{k}$  раз).

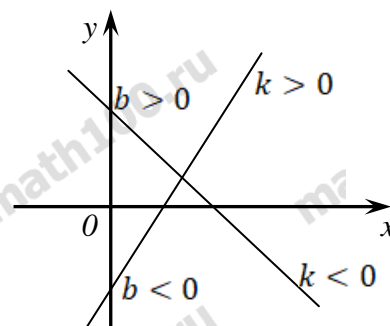
**График функции  $y = mf(x)$**  получаем из графика функции  $y = f(x)$  с помощью растяжения этого графика по оси ординат пропорционально коэффициенту  $m$  при функции (если  $m > 1$ , то график растягивается в  $m$  раз, если  $0 < m < 1$ , то график сжимается в  $\frac{1}{m}$  раз). Если  $m < 0$ , то можно сначала построить график функции  $y = |m|f(x)$ , а затем отобразить его симметрично относительно оси  $Ox$ .

Для построения графика функции  $y = f(|x|)$  (четная функция) нужно построить график функции  $y = f(x)$  для  $x \geq 0$ , а затем отобразить построенную кривую симметрично относительно оси ординат.

Для построения графика функции  $y = |f(x)|$  надо построить график функции  $y = f(x)$ , далее оставить без изменения все части построенного графика, которые лежат выше оси абсцисс, а части, расположенные ниже, отобразить симметрично относительно этой оси.

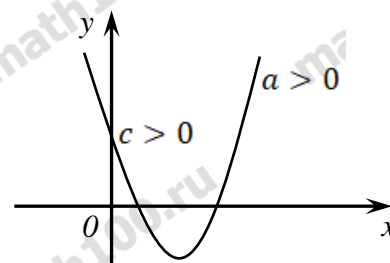
**Замечание.** При построении графиков функций, являющихся суммой, произведением, частным функций или более сложной функции, из которых одна или несколько содержат знак модуля, находят область определения функции, раскрывают знак модуля на тех промежутках, где выражения с модулем не меняют знака, и, наконец строят график функции, заданной на разных промежутках разными формулами.

1)  $y = kx + b$  (**линейная функция**). Графиком является прямая с угловым коэффициентом  $k$ , для построения которой достаточно знать координаты двух точек. Если  $k > 0$ , то прямая возрастает, если  $k < 0$ , то прямая убывает, если  $k = 0$ , то прямая параллельна оси абсцисс. Коэффициент  $b$  показывает пересечение прямой с осью ординат.

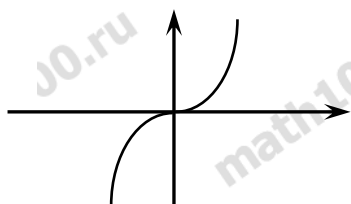


2)  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . (**квадратичная функция**).

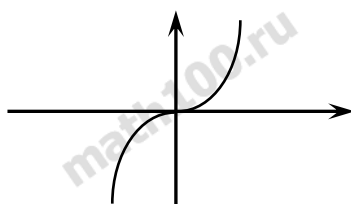
Графиком является парабола с вершиной  $x_B = -\frac{b}{2a}$ . Ветви параболы направлены вверх при  $a > 0$  или вниз при  $a < 0$ . Коэффициент  $c$  показывает пересечение параболы с осью ординат. Если  $D = b^2 - 4ac > 0$ , то квадратный трехчлен имеет два различных корня, а парабола пересекает ось  $Ox$  в двух точках. Если  $D = 0$ , то квадратный трехчлен имеет два равных корня, а парабола касается оси  $Ox$  (т.е. имеет с осью  $Ox$  одну общую точку). Если  $D < 0$ , то квадратный трехчлен не имеет корней, а график квадратичной функции расположен выше ( $a > 0$ ) или ниже ( $a < 0$ ) оси  $Ox$ .



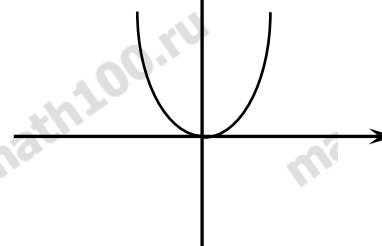
3)  $y = x^3$

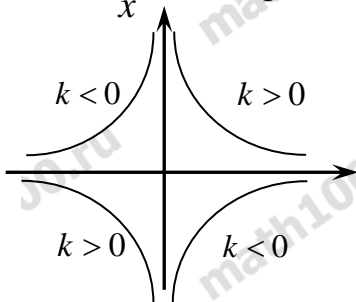
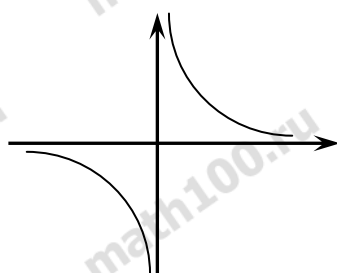
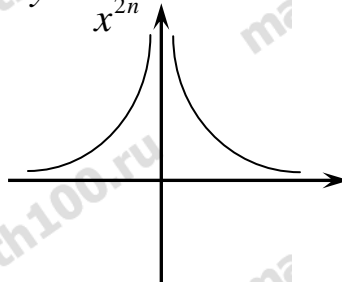
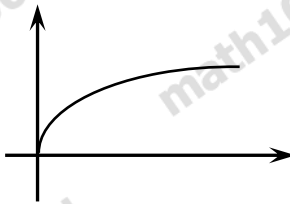
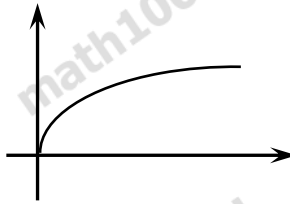
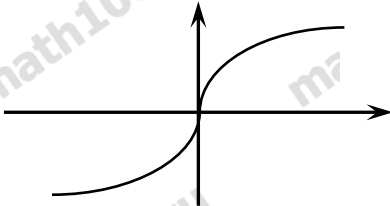
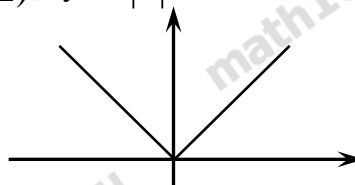
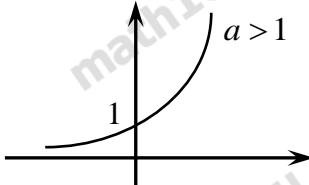
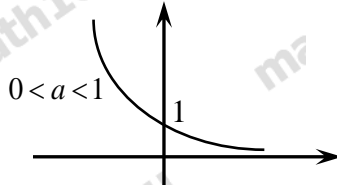
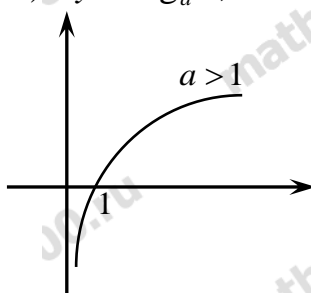
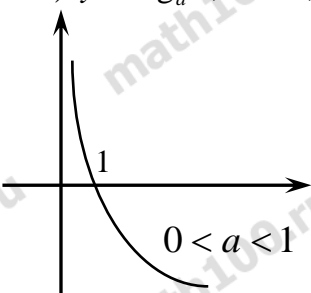
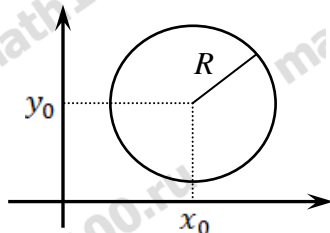
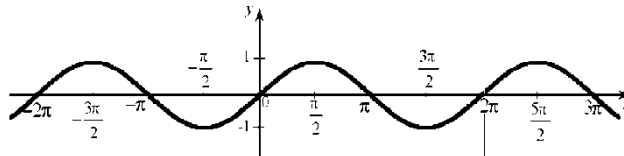
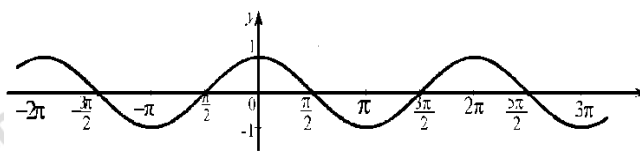
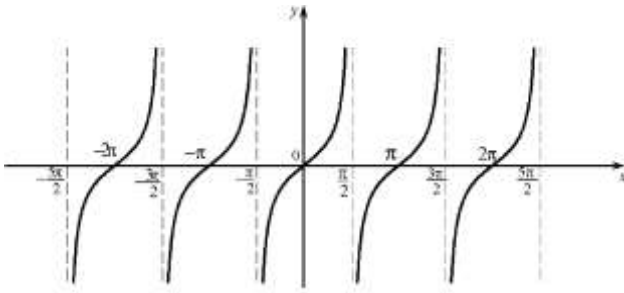
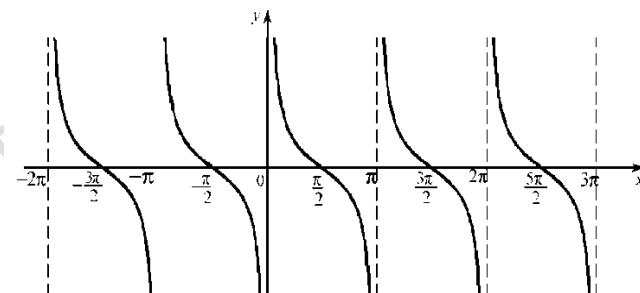


4)  $y = x^{2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$



5)  $y = x^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$



6) $y = \frac{k}{x}$ гипербола 	7) $y = \frac{1}{x^{2n+1}}$ 	8) $y = \frac{1}{x^{2n}}$ 
9) $y = \sqrt{x}$ 	10) $y = \sqrt[2n]{x}, n \in N$ 	11) $y = \sqrt[2n+1]{x}, n \in N$ 
12) $y =  x $ 	13) $y = a^x, x \in R, y > 0$ $a > 1$ 	14) $y = a^x, x \in R, y > 0$ $0 < a < 1$ 
15) $y = \log_a x, x > 0, y \in R$ $a > 1$ 	16) $y = \log_a x, x > 0, y \in R$ $0 < a < 1$ 	17) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ 
18) $y = \sin x, y \in [-1;1], T = 2\pi$ 	19) $y = \cos x, y \in [-1;1], T = 2\pi$ 	
20) $y = \operatorname{tg} x, y \in R, T = \pi$ 	21) $y = \operatorname{ctg} x, y \in R, T = \pi$ 	

Остановимся более подробно на уравнении **окружности**:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ , где точка  $(x_0; y_0)$  – координаты центра окружности, а  $|R|$  – её радиус, если  $R \neq 0$ ; если  $R = 0$ , то получается точка  $(x_0; y_0)$ .

Рассмотрим наиболее часто встречаемые интерпретации уравнений окружности с параметром  $a$ ;

➤ уравнение  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$  задает на координатной плоскости  $(x; y)$  множество окружностей, центр которых расположен в точке  $(x_0; y_0)$  и радиусом  $R = |a|$  при  $a \neq 0$ ; если  $a = 0$ , то саму точку  $(x_0; y_0)$ ;

➤ уравнение  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a$  задает на координатной плоскости  $(x; y)$  множество окружностей, центр которых расположен в точке  $(x_0; y_0)$  и радиусом  $R = \sqrt{a}$  при  $a > 0$ ; если  $a = 0$ , то саму точку  $(x_0; y_0)$ ;

➤ уравнение  $(x - a)^2 + (y - a)^2 = R^2$  задает на координатной плоскости  $(x; y)$  множество окружностей одинакового радиуса  $|R|$  с центром в точке  $x = a$  и  $y = a$  откуда следует, что  $y = x$  – это уравнение прямой, по которой «перемещается» центр окружности;

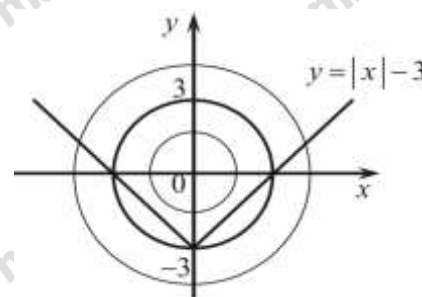
➤ уравнение  $(x - a)^2 + (y + a^2)^2 = R^2$  задает на координатной плоскости  $(x; y)$  множество окружностей одинакового радиуса  $|R|$  с центром в точке  $x = a$  и  $y = -a^2$  откуда следует, что  $y = -x^2$  – это уравнение параболы, по которой «перемещается» центр окружности.

**Пример 1.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y - |x| = -3, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения?

**Решение.** Для решения данной задачи воспользуемся геометрической интерпретацией уравнений, входящих в систему. Рассмотрим на координатной плоскости  $(x; y)$  множество точек, задаваемых уравнениями системы. Первое уравнение системы задает ломанную прямую  $y = |x| - 3$ , а второе – целое семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом  $\sqrt{a}$ . Из рис. ясно, что рассматриваемая система будет иметь три решения при том значении параметра  $a$ , при котором окружность проходит через точку  $(0; -3)$ . Это будет окружность радиуса 3, ей соответствует значение  $a$ , равное 9.



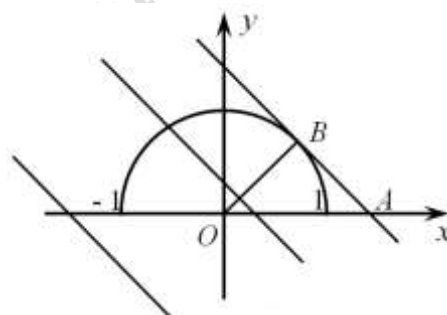


**Пример 2.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$\sqrt{1-x^2} > a-x$$

имеет решения.

**Решение.** Рассмотрим график функции соответствующий левой части неравенства:  $y = \sqrt{1-x^2}$ . Так как правая часть неотрицательна, то  $y \geq 0$ . После возведения обеих частей последнего равенства в квадрат, получим уравнение окружности:  $x^2 + y^2 = 1$  – с центром в начале координат и радиусом  $R=1$ . Но так как  $y \geq 0$ , то графиком функции  $y = \sqrt{1-x^2}$  является половина окружности, расположенная выше оси абсцисс. Графиком функции соответствующим правой части неравенства  $y = a-x$  является множество параллельных прямых с угловым коэффициентом  $k = -1$ . Требуется определить те значения параметра  $a$ , при которых найдутся точки полуокружности, расположенные выше соответствующих точек прямой. Из рисунка видно, что такие точки появятся после того, как прямая  $y = a-x$  будет расположена ниже касательной. Осталось определить значение параметра  $a$ , при котором прямая коснется полуокружности. Так как  $OB = R = 1$  перпендикулярен к касательной и  $\angle BAO = 45^\circ$ , то  $OA = \sqrt{2}$ . Следовательно, при  $a = \sqrt{2}$  прямая касается полуокружности. Таким образом, при  $a \in (-\infty; \sqrt{2})$  исходное неравенство будет иметь решения.

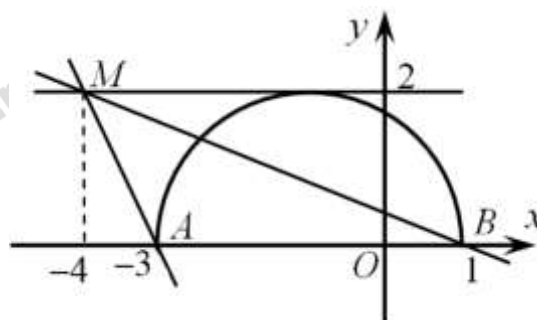


**Пример 3 (ЕГЭ 2013).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$-ax + \sqrt{3-2x-x^2} = 4a+2$$

имеет единственное решение.

**Решение.** Перепишем уравнение в виде:  $\sqrt{3-2x-x^2} = a(x+4) + 2$ . Рассмотрим функции  $y = \sqrt{3-2x-x^2}$  и  $y = a(x+4) + 2$ . Первая функция при  $y \geq 0$  после возведения обеих частей в квадрат примет вид:  $y^2 = 3-2x-x^2$  или  $(x+1)^2 + y^2 = 4$ . Получили полуокружность, расположенную выше оси абсцисс, с центром в точке  $(-1;0)$  и радиусом 2. Графиком второй функция являются прямые, проходящие через точку  $M(-4;2)$  и угловым коэффициентом  $a$ . Все прямые  $y = a(x+4) + 2$ , проходящие между лучами  $MA$  и  $MB$  пересекают полуокружность в одной точке. Также одну точку с



полуокружностью имеют прямые  $MA$  и касательная параллельная оси абсцисс (в этом случае  $a = 0$ ). Осталось определить угловые коэффициенты прямых  $MA$  и  $MB$ . Подставим координаты точек  $A(-3;0)$  и  $B(1;0)$  в уравнение прямой

$y = a(x + 4) + 2$ . Точка  $A(-3;0)$ :  $a = -2$ . Точка  $B(1;0)$ :  $a = -\frac{2}{5}$ . Таким образом,

исходное уравнение имеет одно решение при  $a \in \left[-2; -\frac{2}{5}\right) \cup \{0\}$ .

Рассмотрим уравнение **параллелограмма (ромба, квадрата)**:

➤ уравнение  $|a_1x + b_1y + c_1| + |a_2x + b_2y + c_2| = d$ , где  $d > 0$  и  $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$  ( $i = 1; 2$ ),  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$  задает на координатной плоскости  $(x; y)$  параллелограмм;

➤ уравнение  $\frac{|x - x_0|}{m} + \frac{|y - y_0|}{n} = 1$ , где  $m > 0, n > 0$ , задает на координатной плоскости  $(x; y)$  ромб с центром в точке  $(x_0; y_0)$ , диагоналями  $d_1 = 2m, d_2 = 2n$ , параллельными соответственно осям  $Ox$  и  $Oy$ ;

➤ уравнение  $\frac{|x - x_0|}{m} + \frac{|y - y_0|}{m} = 1$  или  $|x - x_0| + |y - y_0| = m$ , где  $m > 0$ , задает на координатной плоскости  $(x; y)$  квадрат с центром в точке  $(x_0; y_0)$ , диагоналями  $d = 2m$ , параллельными соответственно осям  $Ox$  и  $Oy$ .

Рассмотрим интерпретации наиболее часто встречаемых уравнений ромба с параметром  $a$ ;

➤ уравнение  $\frac{|x - a|}{m} + \frac{|y - a|}{n} = 1$ , где  $m > 0, n > 0$ , задает на координатной плоскости  $(x; y)$  множество ромбов с диагоналями  $d_1 = 2m, d_2 = 2n$ , параллельными соответственно осям  $Ox$  и  $Oy$  и с центром в точке  $x = a$  и  $y = a$  откуда следует, что  $y = x$  — это уравнение прямой, по которой «перемещается» центр ромба;

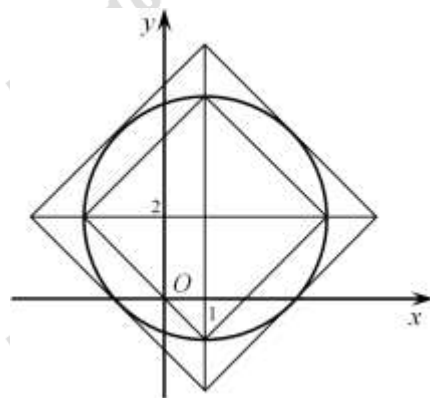
➤ уравнение  $|x - x_0| + |y - y_0| = a$  задает на координатной плоскости  $(x; y)$  множество квадратов, центр которых расположен в точке  $(x_0; y_0)$  и диагоналями  $d = 2a$ , параллельными осям  $Ox$  и  $Oy$  при  $a > 0$ ; если  $a = 0$ , то саму точку  $(x_0; y_0)$ .

**Пример 4.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a|x - 1| + a|y - 2| = 1, \\ x^2 + y^2 = 2x + 4y + 4 \end{cases}$$

имеет ровно восемь различных решений.

**Решение.** Выделим полные квадраты во втором уравнении:  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$  – это окружность с центром в точке  $(1; 2)$  и радиусом  $R = 3$ . При  $a \leq 0$  первое уравнение не имеет решений. При  $a > 0$  первое уравнение перепишем в виде:  $|x-1| + |y-2| = \frac{1}{a}$  – это квадрат с центром в точке  $(1; 2)$  и диагоналями  $\frac{2}{a}$ . Если квадрат вписан в окружность, то радиус окружности равен половине диагонали квадрата, т.е.  $\frac{1}{a} = 3$ , откуда  $a = \frac{1}{3}$  (исходная система в этом случае имеет четыре решения). Если квадрат описан вокруг окружности, то радиус окружности равен половине стороны квадрата, т.е.  $\frac{\sqrt{2}}{2a} = 3$ , откуда  $a = \frac{\sqrt{2}}{6}$  (исходная система в этом случае имеет четыре решения). Таким образом, из рисунка видно, что при  $a \in \left(\frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{1}{3}\right)$  исходная система уравнений имеет 8 решений.



**Расстояние между двумя точками:** формула расстояния  $d$  между двумя точками  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$   $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

**Уравнение отрезка:** пусть даны три точки  $A_1(x_1; y_1)$ ,  $A_2(x_2; y_2)$  и  $M(x; y)$ . Запишем расстояния между следующими точками:

$$A_1M = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, \quad MA_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}, \quad A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Равенство  $A_1M + MA_2 = A_1A_2$  выполняется только тогда, когда точка  $M$  принадлежит отрезку  $A_1A_2$ . Следовательно, уравнению:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

удовлетворяют координаты всех точек отрезка  $A_1A_2$ . Поэтому последнее уравнение называют «уравнением отрезка».

**Расстояние от точки до прямой:** формула расстояния от точки  $M(x_0; y_0)$  до прямой, заданной на координатной плоскости  $Oxy$  уравнением  $ax + by + c = 0$

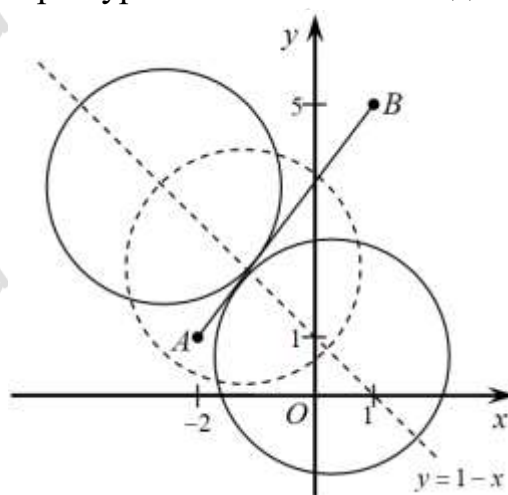
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Пример 5.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 10y + 26} = 5, \\ (x - 1 + a)^2 + (y - a)^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Решение.** Выделим полные квадраты в левой части первого уравнения:  $\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} = 5$ . Пусть  $M(x; y)$  — точка координатной плоскости  $Oxy$ , тогда левая часть последнего уравнения есть сумма расстояний от точки  $M$  до точек  $A(-2; 1)$  и  $B(1; 5)$ . Так как расстояние между точками  $A$  и  $B$  равно 5 (оно легко находится как расстояние между двумя точками), то координаты точки  $M$  удовлетворяют первому уравнению системы только тогда, когда точка  $M$  лежит на отрезке  $AB$ . Таким образом, первому уравнению системы соответствует отрезок  $AB$ . Второе уравнение системы задает множество окружностей с радиусом 2 и центром в точке  $C(1-a; a)$ . Так как координаты центра окружности  $x=1-a$  и  $y=a$ , то  $y=1-x$  — это уравнение прямой по которой «перемещается» центр окружности (на рисунке пунктирная прямая). Условия задачи выполняются только в двух случаях: 1) окружность касается отрезка  $AB$  (на рисунке — сплошные окружности); 2) точка  $A$  находится внутри окружности (это видно из рисунка, пунктирная окружность). Рассмотрим каждый из случаев:



1) окружность касается отрезка  $AB$ , если расстояние от точки  $C(1-a; a)$  до отрезка равно радиусу окружности, то есть 2. Уравнение прямой проходящей через точки  $A$  и  $B$  имеет вид:  $4x - 3y + 11 = 0$  (его можно записать как уравнение прямой через две точки). Воспользуемся формулой расстояния от точки до прямой:  $\frac{|4(1-a) - 3a + 11|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2$ , откуда  $|15 - 7a| = 10$  и  $a_1 = \frac{5}{7}$ ,  $a_2 = \frac{25}{7}$ .

2) найдем значения параметра  $a$ , при которых точка  $A$  находится внутри окружности. Для этого расстояние между точками  $A(-2; 1)$  и  $C(1-a; a)$  должно быть меньше радиуса окружности.  $\sqrt{(1-a+2)^2 + (a-1)^2} < 2$ . После возведения в квадрат последнего неравенства, получим:  $a \in (1; 3)$ .

Таким образом, исходная система уравнений имеет единственное решение при  $a \in \left\{ \frac{5}{7}; \frac{25}{7} \right\} \cup (1; 3)$ .



Задачи для самостоятельного решения разбиты на два уровня сложности А и В. Уровень А простейшие задачи большая часть которых предлагается на ОГЭ. Уровень В по сложности максимально приближен к 18 заданиям ЕГЭ по профильной математике.

### Уровень А

**1А.** Постройте график функции  $y = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{2-x}$ . При каких значениях  $a$  прямая  $y = a$  имеет с графиком данной функции одну общую точку?

**2А.** Постройте график функции  $y = \frac{(x^2 + 7x + 12)(x^2 + 3x + 2)}{x^2 + 6x + 8}$ . При каких значениях  $a$  прямая  $y = a$  имеет с графиком данной функции одну общую точку?

**3А.** Постройте график функции  $y = \frac{x-2}{2x-x^2}$  и определите, при каких значениях  $k$  прямая  $y = kx$  имеет с графиком ровно одну общую точку.

**4А.** Постройте график функции  $y = -4 - \frac{x+1}{x^2+x}$  и определите, при каких значениях  $a$  прямая  $y = a$  не имеет с графиком общих точек.

**5А.** Постройте график функции  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} (1-x)(x+3), & \text{если } x \leq 1 \\ (x-1)(x+3), & \text{если } x > 1. \end{cases}$  При каких значениях  $a$  прямая  $y = a$  имеет с графиком этой функции две общие точки?

**6А.** При каких значениях  $a$  прямая  $y = a$  имеет две общие точки с графиком функции  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} x+6, & \text{если } x < -1 \\ x^2 - 2x + 2, & \text{если } -1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{x}, & \text{если } x \geq 2? \end{cases}$

**7А.** Найдите все положительные значения  $k$ , при которых прямая  $y = kx$  пересекает в двух точках ломаную, заданную условиями:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leq 3 \\ -2x-5, & \text{если } x < -3 \\ 2x-5, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

**8А.** Найдите все положительные значения  $k$ , при которых прямая  $y = kx$  пересекает в двух точках ломаную, заданную условиями:

$$y = \begin{cases} x - 2, & \text{если } x < 6 \\ 10 - x, & \text{если } x \geq 6. \end{cases}$$

**9А.** Постройте график функции  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4, & \text{если } x \geq -4 \\ -\frac{16}{x}, & \text{если } x < -4 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях  $a$  прямая

$y = a$  имеет с графиком одну или две общие точки.

**10А.** Постройте график функции  $y = |-x^2 - 2x + 8|$ . Сколько общих точек может иметь с этим графиком прямая  $y = a$ ? (Для каждого случая укажите соответствующие значения  $a$ .)

**11А.** Постройте график функции  $y = -x^2 + 2|x|$ . Сколько общих точек может иметь с этим графиком прямая  $y = a$ ? (Для каждого случая укажите соответствующие значения  $a$ .)

**12А.** Найдите все значения  $a$ , при которых прямая  $y = x + a$  пересекает график функции  $y = \frac{|x|}{x}$  в двух точках.

**13А.** Постройте график функции  $y = |x|x + 3|x| - 5x$  и определите, при каких значениях  $a$  прямая  $y = a$  имеет с графиком две общие точки.

**14А.** Постройте график функции  $y = \frac{(0,5x^2 + 2x)|x|}{x + 4}$  и определите, при каких значениях  $a$  прямая  $y = a$  не имеет с графиком ни одной общей точки.

**15А.** Постройте график функции  $y = \frac{|x| - 1}{|x| - x^2}$  и определите, при каких значениях  $k$  прямая  $y = kx$  не имеет с графиком ни одной общей точки.

**16А.** Постройте график функции  $y = x^2 - 5x + 10 - 3|x - 2|$  и определите, при каких значениях  $a$  прямая  $y = a + 3$  имеет с графиком данной функции три общие точки.

**17А.** Постройте график функции  $y = |x - 1| - |x + 3| + x + 4$  и определите, при каких значениях  $a$  прямая  $y = a$  имеет с графиком данной функции две общие точки.

**18А.** Постройте график функции  $y = |x - 1| - |x + 1| + x$  и определите, при каких значениях  $k$  прямая  $y = kx$  имеет с графиком данной функции одну общую точку.

**19А.** Постройте график функции  $y = \frac{1}{2} \left( \left| \frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} \right| + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right)$  и определите, при каких значениях  $a$  прямая  $y = a$  имеет с графиком данной функции одну общую точку.

**20А.** Постройте график функции  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} -|x|, & \text{если } |x| \leq 2 \\ x^2 - 6, & \text{если } |x| > 2. \end{cases}$  При каких значениях  $x$  значения функции  $y = f(x)$  неотрицательны?

**21А.** Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению:  $\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 - y^2} = 0$ .

### ОТВЕТЫ

**1А.**  $a_1 = 3; a_2 = 4$ . **2А.**  $a = 3$ . **3А.**  $k = -0,25$ . **4А.**  $a_1 = -4; a_2 = -3$ . **5А.**  $a_1 = 0; a_2 = 4$ . **6А.**  $a \in (0; 1) \cup (2; 5)$ . **7А.**  $k \in \left( \frac{1}{3}; 2 \right)$ . **8А.**  $k \in \left( 0; \frac{2}{3} \right)$ . **9А.**  $a \in \{0\} \cup [4; \infty)$ . **10А.** Две общие точки при  $a \in \{0\} \cup (9; \infty)$ , три общие точки при  $a = 9$ , четыре общие точки при  $a \in (0; 9)$ . **11А.** Две общие точки при  $a \in (-\infty; 0) \cup \{1\}$ , три общие точки при  $a = 0$ , четыре общие точки при  $a \in (0; 1)$ . **12А.**  $a \in (-1; 1)$ . **13А.**  $a_1 = -1; a_2 = 16$ . **14А.**  $a = -8$ . **15А.**  $k_1 = -1; k_2 = 0; k_3 = 1$ . **16А.**  $a_1 = 0; a_2 = 1$ . **17А.**  $a_1 = 1; a_2 = 5$ . **18А.**  $k \in (-\infty; -1) \cup [1; \infty)$ . **19А.**  $a_1 = -1; a_2 = 1$ . **20А.**  $x \in (-\infty; -\sqrt{6}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{6}; \infty)$ .

### Уровень В

**1В (ЕГЭ 2012).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| = ax + a - 2$  на промежутке  $(-1; \infty)$  имеет больше двух корней.

**2В (ЕГЭ 2012).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $4 + \left| \frac{5}{x} - 6 \right| = 2ax$  имеет более двух положительных корней.

**3В (ЕГЭ 2012).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\frac{2}{x+1} = a|x-3|$  на промежутке  $[0; \infty)$  имеет больше двух корней.

**4В (ЕГЭ 2012).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\frac{10}{x+4} = a|x-6|$  имеет более двух неотрицательных корней.

**5В (ЕГЭ 2012).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sqrt{1-2x} = a-7|x|$  имеет более двух корней.

**6В (ЕГЭ 2012).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sqrt{1-2x} = a-3|x|$  имеет более двух корней.

**7В (ЕГЭ 2013).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $ax + \sqrt{3-2x-x^2} = 4a+2$  имеет единственный корень.

**8В (ЕГЭ 2013).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $ax + \sqrt{-7-8x-x^2} = 2a+3$  имеет единственный корень.

**9В (ЕГЭ 2019).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых наименьшее значение функции  $f(x) = x - 2|x| + |x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a|$  больше  $-4$ .

**10В. (ЕГЭ 2019).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых наименьшее значение функции  $f(x) = ax - 2a - 1 + |x^2 - x - 2|$  меньше  $-2$ .

**11В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} y^2 + 2(x-2)y + (x^2-4)(2x-x^2) = 0, \\ y = a(x-4) \end{cases}$  имеет три различных решения.

**12В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} y^2 + 2xy + (x^2 + 2x - 3)(3 - x^2) = 0, \\ y - ax - 6a = 0 \end{cases}$  имеет более двух различных решений.

**13В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых решения неравенства  $|2x-a|+1 \leq |x+3|$  образуют отрезок длины 1.

**14В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых решения неравенства  $|3x-a|+2 \leq |x-4|$  образуют отрезок длины 1.

**15В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых множеством решений неравенства  $\sqrt{3-x} + |x-a| \leq 2$  является отрезок.

**16В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых множеством решений неравенства  $\sqrt{5-x} + |x+a| \leq 3$  является отрезок.



**17В (ЕГЭ 2016).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (xy^2 - 2xy - 6y + 12)\sqrt{6-x} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$
 имеет ровно три различных решения.

**18В (ЕГЭ 2016).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (xy^2 - xy - 6y + 6)\sqrt{y+2} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$
 имеет ровно три различных решения.

**19В (ЕГЭ 2016).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0, \\ x + y = a \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.

**20В (ЕГЭ 2016).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 2x - 4y + 4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}} = 0, \\ x + y = a \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

**21В (ЕГЭ 2011).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} y = \sqrt{5 + 4x - x^2} + 2, \\ y = \sqrt{9 - a^2 + 2ax - x^2} + a \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

**22В (ЕГЭ 2011).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} y = \sqrt{5 - 8x - 4x^2} + 2, \\ y + 2a = \sqrt{9 - 4a^2 + 8ax - 4x^2} \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

**23В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $ax = 12a + \sqrt{6|x| + 2x - x^2}$  имеет нечетное число различных корней.

**24В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $ax = 24a + \sqrt{12|x| + 4x - x^2}$  имеет отличное от нуля четное число различных корней.

**25В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} y^2 - (x^2 + \sqrt{2|x| - x^2} - 4)y + (x^2 - 4)\sqrt{2|x| - x^2} = 0, \\ a + 2x = y \end{cases}$$
 имеет нечетное число различных решений.

**26В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} y^2 - (x^2 + \sqrt{4|x| - x^2} - 16)y + (x^2 - 16)\sqrt{4|x| - x^2} = 0, \\ a + 4x = y \end{cases}$$
 имеет нечетное

число различных решений.

**27В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(5x + a)^2 - (|x| + \sqrt{6|x| - x^2} - 6)(5x + a) + (|x| - 6)\sqrt{6|x| - x^2} = 0$  имеет отличное от нуля четное число различных корней.

**28В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(3x + a)^2 - (|x| + \sqrt{10|x| - x^2} - 10)(3x + a) + (|x| - 10)\sqrt{10|x| - x^2} = 0$  имеет нечетное число различных корней.

**29В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} x^2 - 2x + |y| - 15 = 0, \\ x^2 + (y - 2a)(y + 2a) = 2x - 1 \end{cases}$$
 имеет ровно 6 решений.

**30В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} x^2 - 8x + |y| + 12 = 0, \\ x^2 + (y - a)(y + a) = 8x - 16 \end{cases}$$
 имеет ровно 8 решений.

**31В (ЕГЭ 2016).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x - 3)(y + 3x - 9) = |x - 3|^3, \\ y = x + a \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

**32В (ЕГЭ 2016).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x - 2)(y + 2x - 4) = |x - 2|^3, \\ y = x + a \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

**33В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|, \\ x - y = a \end{cases}$$
 имеет более двух решений.

**34В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (ay - ax + 2)(y - x + 3a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$
 имеет ровно 6 решений.

**35В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} 2|x| + 3|y| = 6, \\ x^2 + (y - a)^2 = 4 \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.

**36В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} 3|x| + 4|y| = 12, \\ |y| - |x| = a \end{cases}$  имеет ровно четыре различных решения.

**37В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 5a^4 \end{cases}$  имеет ровно два решения.

**38В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 10xy, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 10a^4 \end{cases}$  имеет ровно два решения.

**39В (ЕГЭ 2015).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 4y = 4|2x - y|, \\ x + 2y = a \end{cases}$  имеет более двух решений.

**40В (ЕГЭ 2015).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1|, \\ y = a(x - 1) \end{cases}$  имеет более двух решений.

**41В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} 4|y - 3| = 12 - 3|x|, \\ y^2 - a^2 = 3(2y - 3) - x^2 \end{cases}$  имеет ровно четыре различных решения.

**42В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} 5|x + 2| = 60 - 12|y|, \\ 4(x + 1) + y^2 = a^2 - x^2 \end{cases}$  имеет ровно четыре различных решения.

**43В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sqrt{2xy + a} = x + y + 5$  не имеет решений.

**44В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sqrt{a - 2xy} = y - x + 7$  имеет единственное решение.

**45В (ЕГЭ 2016).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} x(x^2 + y^2 - y - 2) = |x|(y - 2), \\ y = x + a \end{cases}$  имеет ровно три различных решения.

**46В (ЕГЭ 2016).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений  $\begin{cases} x(x^2 + y^2 + y - x - 2) = |x|(x^2 + y^2 - y + x), \\ y = a(x + 2) \end{cases}$  имеет ровно три различных решения.

**47В (ЕГЭ 2011).** Найдите все положительные значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

**48В (ЕГЭ 2011).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (|x| - 4)^2 + (|y| - 4)^2 = 4, \\ y = ax + 1, \\ xy > 0 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

**49В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 25, \\ y = |x - a| + 1 \end{cases}$$
 имеет ровно три различных решения.

**50В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9, \\ y = |x - a| + 2 \end{cases}$$
 имеет ровно три различных решения.

**51В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} y + a = |x| + 5, \\ x^2 + (y - 2a + 5)^2 = 4 \end{cases}$$
 имеет ровно три различных решения.

**52В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} y + 6 = |x| + a, \\ x^2 + (y + 3a - 13)^2 = 9 \end{cases}$$
 имеет ровно три различных решения.

**53В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} y = a|x| + a + 2, \\ x^2 + (y - a^2)^2 = 16 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

**54В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} y = a|x| + a + 1, \\ x^2 + (y + a^2)^2 = 9 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

**55В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x - 2a - 3)^2 + (y - 3a - 5)^2 = 100, \\ (x - 3a - 8)^2 + (y - 4a - 3)^2 = 9 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.



**56B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x-5a-6)^2 + (y-4a+5)^2 = 36, \\ (x-6a-5)^2 + (y-5a+8)^2 = 16 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

**57B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + (y-6)^2 = 36, \\ \sqrt{x^2 + (y-18)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 324} \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

**58B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + (y-5)^2 = 25, \\ \sqrt{x^2 + (y-15)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 225} \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

**59B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x+a-8)^2 + (y-a)^2 = 32, \\ \sqrt{x^2 + (y-8)^2} + \sqrt{(x-8)^2 + y^2} = 8\sqrt{2} \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.

**60B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x+a-10)^2 + (y-a)^2 = 50, \\ \sqrt{x^2 + (y-10)^2} + \sqrt{(x-10)^2 + y^2} = 10\sqrt{2} \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.

**61B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-3)^2} = 3 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

**62B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} y^2 + (2a+5)y + a^2 + 5a + 4 = 0, \\ \sqrt{(x+a)^2 + (y+3)^2} + \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = 3 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

**63B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x+3\sin z)^2 + (y+3\cos z)^2 = 4, \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

**64B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x-5\sin z)^2 + (y-5\cos z)^2 = 9, \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

**65В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x + \sqrt{25 - z})^2 + (y - \sqrt{z})^2 = 9, \\ a + x = y \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

**66В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x - \sqrt{z})^2 + (y - \sqrt{16 - z})^2 = 4, \\ x + y = a \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

**67В.** Найдите все неотрицательные значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - a)^2} = \sqrt{4 + a^2}, \\ 5y = |6 - a^2| \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

**68В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} = 3\sqrt{2}, \\ |y| + x^2 = a \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

**69В (ЕГЭ 2018).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(a + 1)x - 2ay + 5a^2 + 8a + 3 = 0, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

**70В (ЕГЭ 2018).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(a - 3)x - 4ay + 5a^2 - 6a = 0, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

**71В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} y = ||x + 3| - 1|, \\ x^2 + y^2 = 2ay - a^2 - 4x - \frac{7}{2} \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.

**72В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x + y^2 - 1)(y - \sqrt{6}|x|) = 0, \\ 2ay + x = 1 + a^2 \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.

**73В.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 9}}{x + 3} + \frac{x - 4}{\sqrt{16 - 8x + x^2}} + 1 \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2(x + ay + 12) \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.

**74B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\log_3\left(2 + \frac{|x|}{x}\right) = (x+2)^2 + a$  имеет ровно 2 различных корня. Найдите эти корни при каждом  $a$ .

**75B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$  имеет ровно 8 различных решений.

**76B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых площадь пересечения двух фигур, заданных неравенствами  $|x-3| + |y-3| \leq 4$  и  $|x-a| + |y-a| \leq 1$  равна 1.

**77B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} 3|x-2a| + 2|y-a| = 6, \\ xy - x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$
 имеет ровно три различных решения.

**78B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} |x-a| + 2|y-a| = 5, \\ xy - x - y + 1 = 0 \end{cases}$$
 имеет ровно три различных решения.

**79B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\cos\sqrt{2\pi ax - 4x^2} + \cos 2\sqrt{2\pi ax - 4x^2} = 0$  имеет ровно 2 различных решения.

**80B (ЕГЭ 2020).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} \log_5(64 - y^2) = \log_5(64 - a^2x^2) \\ x^2 + y^2 = 2x + 8y \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.

**81B (ЕГЭ 2020).** Найдите все положительные значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{2ay - a^2y^2} \\ y = x^2 \end{cases}$$
 имеет ровно три различных решения.

**82B (ЕГЭ 2021).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $a|x+1| + (a+1)|1-x| + 2 = 0$  имеет ровно два различных корня.

**83B (ЕГЭ 2021).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $a|x+1| + (1-a)|1-x| + 2 = 0$  имеет ровно два различных корня.

**84B.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (3\sqrt{x|x|} + |y| - 3)(|x| + 3|y| - 9) = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$
 имеет ровно три различных решения.

**85В (ЕГЭ 2023).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (xy - x + 8) \cdot \sqrt{y - x + 8} = 0 \\ y = 2x + a \end{cases}$$
 имеет ровно 2 различных решения.

**86В (ЕГЭ 2023).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (xy - x + 7) \cdot (y - x + 7) = 0 \\ y = 3x + a \end{cases}$$
 имеет ровно 2 различных решения.

**87В (ЕГЭ 2023).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (xy - 2x + 16) \cdot \sqrt{y - 2x + 16} = 0 \\ y = ax - 14 \end{cases}$$
 имеет ровно 2 различных решения.

**88В (ЕГЭ 2023).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0 \\ y = 3x + a \end{cases}$$
 имеет ровно 2 различных решения.

**89В (ЕГЭ 2023).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x^2 - 6x - y + 2) \cdot \sqrt{x - y + 2} = 0 \\ y = ax + a \end{cases}$$
 имеет ровно 2 различных решения.

**90В (ЕГЭ 2023).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x^2 - 2x - y + 2) \cdot \sqrt{x - y + 2} = 0 \\ y = 4x + a \end{cases}$$
 имеет ровно 2 различных решения.

**91В (ЕГЭ 2023).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + 4x) \cdot \sqrt{2x + y + 6} = 0 \\ y = ax - 2a \end{cases}$$
 имеет ровно 2 различных решения.

**92В (ЕГЭ 2023).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} (|x + 2| + |x - 1| - y) \cdot \sqrt{10 - x - y} = 0 \\ y = x + a \end{cases}$$
 имеет ровно 2 различных решения.



**93В (ЕГЭ 2023).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + |x^2 + 2x| = y^2 + |y^2 + 2y| \\ x + y = a \end{cases}$$
 имеет более 2 решений.

**94В (ЕГЭ 2023).** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + x + |x^2 - x - 2| = y^2 + y + |y^2 - y - 2| \\ x + y = a \end{cases}$$
 имеет более 2 решений.

### ОТВЕТЫ

1В.  $\left(\frac{6}{5}; \frac{5}{4}\right)$ . 2В.  $\left(\frac{12}{5}; \frac{5}{2}\right)$ . 3В.  $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ . 4В.  $\left(\frac{2}{5}; \frac{5}{12}\right)$ . 5В.  $\left[\frac{7}{2}; \frac{25}{7}\right)$ . 6В.  $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right)$ . 7В.  $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}\right) \cup \{0\}$ . 8В.  $\left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \{0\}$ . 9В.  $\left(-\frac{5}{4}; 2\right)$ . 10В.  $(-\infty; -5) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$ . 11В.  $6 \pm 4\sqrt{2}; -8 \pm 4\sqrt{3}; -\frac{3}{5}; 0$ . 12В.  $(-\infty; -12 - 2\sqrt{33}] \cup [-12 + 2\sqrt{33}; 10 - 2\sqrt{21}] \cup [10 + 2\sqrt{21}; \infty)$ . 13В.  $-\frac{5}{2}; -\frac{19}{2}$ . 14В. 2; 22. 15В.  $(-1; 1) \cup \left[\frac{5}{4}; 5\right)$ . 16В.  $\left(-8; -\frac{9}{4}\right] \cup (-2; 4)$ . 17В.  $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{2}{3}\right\}$ . 18В.  $\left\{\frac{1}{6}\right\} \cup \left[\frac{2}{3}; \infty\right)$ . 19В.  $(-6; 1] \cup \{8\} \cup [9; 10)$ . 20В.  $(-\infty; -6] \cup \{2\} \cup [8; \infty)$ . 21В.  $[-1; 2) \cup (2; 5]$ . 22В.  $[-2; 5; -1) \cup (-1; 0; 5]$ . 23В.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{12}; 0$ . 24В.  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{12}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{12}; 0\right)$ . 25В.  $-5; 0; \sqrt{5} - 2; \sqrt{5} + 2$ . 26В.  $-20; 0; 2\sqrt{17} - 8; 2\sqrt{17} + 8$ . 27В.  $(-30; 0) \cup (0; 3\sqrt{26} - 15) \cup (3\sqrt{26} - 15; 3\sqrt{26} + 15)$ . 28В.  $-30; 0; 5\sqrt{10} - 15; 5\sqrt{10} + 15$ . 29В.  $\pm 2$ . 30В.  $\left(-2; -\frac{\sqrt{15}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{15}}{2}; 2\right)$ . 31В.  $(-7; -3) \cup (-3; 1)$ . 32В.  $\left(-\frac{17}{4}; -2\right) \cup \left(-2; \frac{1}{4}\right)$ . 33В.  $(1 - \sqrt{10}; -2) \cup \{0\}$ . 34В.  $\left(0; \frac{4}{9}\right) \cup (1; \infty)$ . 35В.  $\left(-4; \frac{6 - 2\sqrt{13}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{13} - 6}{3}; 4\right)$ . 36В.  $(-4; 3)$ . 37В.  $\pm \frac{1}{5}$ . 38В.  $\pm \frac{1}{5}$ . 39В.  $(-5 - 5\sqrt{5}; -10] \cup [0; 5\sqrt{5} - 5)$ . 40В.  $(1; 2)$ . 41В.  $\left\{\pm \frac{12}{5}\right\} \cup (-4; -3) \cup (3; 4)$ . 42В.  $\left\{\pm \frac{60}{13}\right\} \cup (-12; -5) \cup (5; 12)$ . 43В.  $(-\infty; -12; 5)$ .

- 44B.**  $-24,5$ . **45B.**  $\{1-\sqrt{2}\} \cup [0;2) \cup (2;2\sqrt{2})$ . **46B.**  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ . **47B.**  $3; 2+\sqrt{65}$ . **48B.**  $\frac{6-\sqrt{21}}{6}; \frac{10+\sqrt{37}}{6}$ . **49B.**  $8-5\sqrt{2}; 3; 5\sqrt{2}-2$ . **50B.**  $5-3\sqrt{2}; 2; 3\sqrt{2}-1$ . **51B.**  $4$ . **52B.**  $4$ . **53B.**  $-2$ . **54B.**  $1$ . **55B.**  $-10; -5; 2; 7$ . **56B.**  $-5; 1; 3; 9$ . **57B.**  $\pm 6\sqrt{3}$ . **58B.**  $\pm 5\sqrt{3}$ . **59B.**  $4$ . **60B.**  $5$ . **61B.**  $[-2;1) \cup (1;4]$ . **62B.**  $[-4;-1) \cup (-1;2]$ . **63B.**  $[1;5\sqrt{2}]$ . **64B.**  $[2;8\sqrt{2}]$ . **65B.**  $[5-3\sqrt{2};8\sqrt{2}]$ . **66B.**  $[4-2\sqrt{2};6\sqrt{2}]$ . **67B.**  $[1;6]$ . **68B.**  $\left\{\frac{3}{4}\right\} \cup (3;5]$ . **69B.**  $\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{3}; -1\right) \cup \left(-1; -\frac{3}{5}\right) \cup \left(-\frac{3}{5}; \sqrt{2}-2\right)$ . **70B.**  $(1-\sqrt{2};0) \cup \left(0; \frac{6}{5}\right) \cup \left(\frac{6}{5}; 3\sqrt{2}-3\right)$ . **71B.**  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \{1\}$ . **72B.**  $\left(-\frac{\sqrt{6}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{12}\right] \cup \left\{\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$ . **73B.**  $[-3;-2) \cup (-1;2) \cup (4;5) \cup \{6\}$ . **74B.** при  $a \in (-\infty; -4]$   $x_1 = -2 - \sqrt{-a}$ ,  $x_2 = -2 + \sqrt{1-a}$ ; при  $a \in [-3;0)$   $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-a}$ . **75B.**  $(-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$ . **76B.**  $1; 5$ . **77B.**  $0; \frac{1}{4}; \frac{7}{4}; 2$ . **78B.**  $-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{8}{3}; \frac{7}{2}$ . **79B.**  $\left(-2; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 2\right)$ . **80B.**  $(-\infty; -4] \cup \left\{-\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}\right\} \cup [4; \infty)$ . **81B.**  $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; \infty)$ . **82B.**  $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ . **83B.**  $(-\infty; -1) \cup (2; \infty)$ . **84B.**  $\pm 4; 6$ . **85B.**  $(-16; -9] \cup \{-7; 9\}$ . **86B.**  $-21; -9; 1-2\sqrt{21}; 1+2\sqrt{21}$ . **87B.**  $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{7}{4}\right] \cup \{2; 4\}$ . **88B.**  $\{-13\} \cup [-9; 3)$ . **89B.**  $\{-2; 1\} \cup \left[\frac{9}{8}; 2\right)$ . **90B.**  $(-7; 2)$ . **91B.**  $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right\} \cup \left[-\frac{3}{14}; \frac{1}{2}\right]$ . **92B.**  $\{2\} \cup [4; 32)$ . **93B.**  $[-1; 0)$ . **94B.**  $(-2; 0]$ .