

## ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Достаточно часто в вариантах ЕГЭ и диагностических работах стали появляться экономические задачи на оптимизацию. Как правило, решение таких задач сводится к исследованию функции, нахождению точек экстремума и наибольшего (наименьшего) значения функции. Для этого сначала составляется, как принято говорить, математическую модель задачи. Здесь часто успех решения зависит от разумного выбора независимой переменной. Затем выявляют оптимизирующую величину (т.е. величину, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти) и, записав функцию, связывающую независимую переменную с оптимизирующей величиной, исследуют ее. Чаще всего это делается с помощью производных. Ниже приведены задачи, которые можно использовать для подготовки к 16 заданиям профильного ЕГЭ по математике.

1) В 1-е классы поступает 45 человек: 20 мальчиков и 25 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 23. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

[Решение](#)

---

2) В 1-е классы поступает 43 человека: 23 мальчика и 20 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 21. После распределения посчитали процент мальчиков в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

[Решение](#)

---

3) У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

[Решение](#)

---

4) У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 500 ц/га. Фермер может продать картофель по цене 5 000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 8 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

[Решение](#)

---

5) В двух шахтах добывают алюминий и никель. На первой шахте имеется 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться 6 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. На второй шахте имеется 180 рабочих, каждый из которых готов трудиться 6 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

### Решение

---

6) В двух шахтах добывают алюминий и никель. На первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3 кг никеля. На второй шахте имеется 260 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 2 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

### Решение

---

7) Сергей является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $5t$  единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $12t$  единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Сергей платит рабочему 400 рублей. Сергей готов выделять 608 400 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

### Решение

---

8) Владлен является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $6t$  единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов

в неделю, то за эту неделю они производят  $8t$  единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владлен платит рабочему 300 рублей. Владлен готов выделять 1 920 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

### Решение

---

9) Зинаида является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $8t$  единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $15t$  единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Зинаида платит рабочему 600 рублей. Зинаиде нужно каждую неделю производить 578 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

### Решение

---

10) Федор является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $3t$  единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $4t$  единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Федор платит рабочему 400 рублей. Федору нужно каждую неделю производить 225 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

### Решение

---

11) Производство  $x$  тыс. единиц продукции обходится в  $q = 0,5x^2 + x + 7$  млн. рублей в год. При цене  $p$  тыс. рублей за единицу продукции годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет  $px - q$ . Завод выпускает продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении  $p$  через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?

### Решение

---

12) Производство  $x$  тыс. единиц продукции обходится в  $q = 0,5x^2 + 2x + 5$  млн. рублей в год. При цене  $p$  тыс. рублей за единицу продукции годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет  $px - q$ . Завод выпускает продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей.

При каком наименьшем значении  $p$  через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн рублей?

Решение

---

13) Макар является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $t$  единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Макар платит рабочему 300 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе,—200 рублей. Макар готов выделять 30 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение

---

14) Станислав является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $t$  единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Станислав платит рабочему 400 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе,—300 рублей. Станислав готов выделять 84 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение

---

15) В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи  $x$  кг алюминия в день требуется  $x^2$  человеко-часов труда, а для добычи  $y$  кг никеля в день требуется  $y^2$  человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно за сутки суммарно добыть в двух областях?

Решение

---

16) В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи  $x$  кг алюминия в день требуется  $x^2$  человеко-часов труда, а для добычи  $y$  кг никеля в день требуется  $y^2$  человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава.



Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение

---

17) Фёдор является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  $25t^3$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $t$  изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно  $t^3$  часов в неделю, то они производят  $t$  изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Фёдор платит рабочему 360 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 30 изделий. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение

---

18) Василий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  $16t^3$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $t$  изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно  $t^3$  часов в неделю, то они производят  $t$  изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Василий платит рабочему 250 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 изделий. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение

---

19) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 25 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает  $t$  человек, то их суточная зарплата составляет  $3t^2$  д. е. Если на втором объекте работает  $t$  человек, то их суточная зарплата составляет  $t^2$  д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

Решение

---

20) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 22 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает  $t$  человек, то их суточная зарплата составляет  $4t^2$  д. е. Если на втором объекте работает  $t$  человек, то их суточная зарплата составляет  $t^2$  д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

Решение

---

21) Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство  $x$  тыс. ед. продукции на таком заводе равны  $0,5x^2 + 2x + 6$  млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене  $p$  тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит  $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$ . Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении  $p$  строительство завода окупится не более чем за 3 года?

Решение

---

22) Строительство нового завода стоит 140 млн рублей. Затраты на производство  $x$  тыс. ед. продукции на таком заводе равны  $0,4x^2 + x + 5$  млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене  $p$  тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит  $px - (0,4x^2 + x + 5)$ . Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении  $p$  строительство завода окупится не более чем за 4 года?

Решение

---

23) Производство некоторого товара облагалось налогом в размере  $t_0$  рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь нарастить сумму налоговых поступлений, увеличило налог вдвое (до  $2t_0$  рублей за единицу товара), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после такого увеличения, чтобы добиться максимальных налоговых поступлений, если известно, что при налоге, равном  $t$  рублей за единицу товара, объём производства составляет  $10\,000 - 2t$  единиц и это число положительно?

Решение

---

24) Производство некоторого товара облагалось налогом в размере  $t_0$  рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь нарастить сумму налоговых поступлений за счёт увеличения производства товара, уменьшило налог вдвое (до  $\frac{t_0}{2}$  рублей за единицу товара), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после такого уменьшения, чтобы добиться максимальных налоговых поступлений, если известно, что при налоге, равном  $t$  рублей за единицу товара, объём производства составляет  $10\,000 - 2t$  единиц и это число положительно?

Решение

---

25) Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года  $t$  становится равной  $t^2$  тыс. руб. (т. е. к концу первого года они стоят 1 тыс. руб., к концу второго — 4 тыс. руб. и т. д.), в течение 20 лет. В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить

вырученные деньги в банк под 25% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль была максимальной?

Решение

---

26) Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года  $t$  становится равной  $t^2$  тыс. руб. (т. е. к концу первого года они стоят 1 тыс. руб., к концу второго — 4 тыс. руб. и т. д.), в течение 30 лет. В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить вырученные деньги в банк под 20% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль была максимальной?

Решение

---

27) Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $t^2$  тыс. рублей в конце года  $t$  ( $t = 1, 2, 3, \dots$ ). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в  $1 + r$  раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях  $r$  это возможно?

Решение

---

28) Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $10t$  тыс. рублей в конце года  $t$  ( $t = 1, 2, 3, \dots$ ). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в  $1 + r$  раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце одиннадцатого года. При каких положительных значениях  $r$  это возможно?

Решение

---

29) Зависимость количества  $Q$  (в шт.,  $0 \leq Q \leq 20\,000$ ) купленного у фирмы товара от цены  $P$  (в руб. за шт.) выражается формулой  $Q = 20\,000 - P$ . Затраты на производство  $Q$  единиц товара составляют  $6\,000Q + 4\,000\,000$  рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог  $t$  рублей ( $0 < t < 10\,000$ ) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет  $PQ - 6\,000Q - 4\,000\,000 - tQ$  рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна  $tQ$  рублей. Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении  $t$  общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

Решение

---

**30)** Зависимость количества  $Q$  (в шт.,  $0 \leq Q \leq 15\,000$ ) купленного у фирмы товара от цены  $P$  (в руб. за шт.) выражается формулой  $Q = 15\,000 - P$ . Затраты на производство  $Q$  единиц товара составляют  $3\,000Q + 1\,000\,000$  рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог  $t$  рублей ( $0 < t < 10\,000$ ) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет  $PQ - 3\,000Q - 1\,000\,000 - tQ$  рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна  $tQ$  рублей. Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении  $t$  общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

**Решение**

---

**31)** Зависимость объёма  $Q$  (в шт.) купленного у фирмы товара от цены  $P$  (в руб. за шт.) выражается формулой  $Q = 15\,000 - P$ ,  $1\,000 \leq P \leq 15\,000$ . Доход от продажи товара составляет  $PQ$  рублей. Затраты на производство  $Q$  единиц товара составляют  $3\,000Q + 5\,000\,000$  рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

**Решение**

---

**32)** На счет, который Кирилл Николаевич имел в начале 1-го года, начисляется в конце этого года  $x$  процентов, а на тот счет, который Кирилл Николаевич имел в конце 2-го года  $y$  процентов, причем  $x + y = 50\%$ . Кирилл Николаевич положил на счет в начале 1-го года некоторую сумму и добавил в конце 1-го года после начисления процентов десятую часть этой суммы. При каком значении  $x$  счет в конце 2-го года окажется максимальным?

**Решение**

---

**33) (ЕГЭ 2019)** Строительство нового завода стоит 159 млн. рублей. Затраты на производство  $x$  тыс. ед. продукции на таком заводе равны  $0,5x^2 + 2x + 6$  млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене  $p$  тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит  $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$ . Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. Цена продукции в первый год 10 тыс. рублей, а каждый следующий год увеличивается на 1 тыс. рублей. Через сколько лет окупится строительство завода?

**Решение**

---

**34)** Евгений хочет купить пакет акций компании. 15 февраля он отложил определённую сумму денег и планирует откладывать такую же сумму денег 15 числа каждого месяца. Первого февраля пакет акций стоил 195 000 рублей.



Первого числа каждого месяца пакет акций дорожает на 40 %. Какую наименьшую сумму нужно Евгению откладывать каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

**Решение**

---

**35)** Михаил хочет купить пакет акций компании. 15 февраля он отложил определённую сумму денег и планирует откладывать такую же сумму денег 15 числа каждого месяца. Первого февраля пакет акций стоил 160 000 рублей. Первого числа каждого месяца пакет акций дорожает на 25 %. Какую наименьшую сумму нужно Михаилу откладывать каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

**Решение**

---

**ОТВЕТЫ**

1) В одном классе — 22 девочки, в другом — 3 девочки и 20 мальчиков. 2) В одном классе — 21 мальчик, в другом — 20 девочек и 2 мальчика. 3) 84 млн. руб. 4) 65 млн. руб. 5) 3 300. 6) 4 500. 7) 507. 8) 800. 9) 693 600. 10) 810 000. 11) 9. 12) 8. 13) 500. 14) 700. 15) 280. 16) 200. 17) 6,75. 18) 1,28. 19) 6 рабочих на 1-й объект, 19 рабочих на 2-й объект, зарплата 469 д. е. 20) 4 рабочих на 1-й объект, 18 рабочих на 2-й объект, зарплата 388 д. е. 21) 10. 22) 9. 23) 25. 24) 50. 25) 9. 26) 11. 27)  $\left(\frac{43}{441}; \frac{41}{400}\right)$ . 28)  $\left(\frac{1}{11}; \frac{1}{10}\right)$ . 29) 7 000. 30) 6 000. 31) 12,5. 32) 20. 33) 4. 34) 127 400. 35) 78 125.