

## ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

**Параллелограмм.** Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

### Свойства и признаки параллелограмма

- 1) Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.
- 2) Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.
- 3) Противоположные углы параллелограмма попарно равны.
- 4) Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.
- 5) Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.
- 6) Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.
- 7) Если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

**Свойство середин сторон четырёхугольника.** Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырёхугольника.

### Формулы площади параллелограмма

1) Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне, т.е.  $S = a h$ .

2) Площадь параллелограмма равна произведению двух смежных сторон на синус угла между ними, т.е.

$$S = ab \sin \alpha.$$

3) Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними, т.е.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

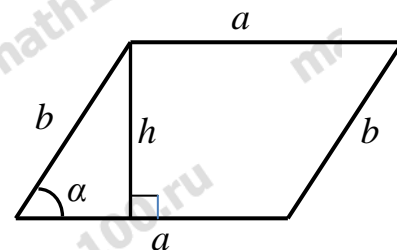
**Прямоугольник.** Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые. Площадь прямоугольника равна произведению двух смежных сторон.

### Свойства и признаки прямоугольника

- 1) Диагонали прямоугольника равны.
- 2) Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.

**Квадрат.** Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

**Ромб.** Ромбом называется четырёхугольник, все стороны которого равны.



**Свойства и признаки ромба**

- 1) Диагонали ромба перпендикулярны.
- 2) Диагонали ромба делят его углы пополам.
- 3) Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб.
- 4) Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм – ромб.

**Формулы площади ромба**

- 1) Площадь ромба равна произведению стороны на высоту, т.е.  $S = ah$ .
- 2) Площадь ромба равна произведению двух сторон на синус угла между ними, т.е.

$$S = a^2 \sin \alpha.$$

- 3) Площадь ромба равна половине произведения диагоналей, т.е.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

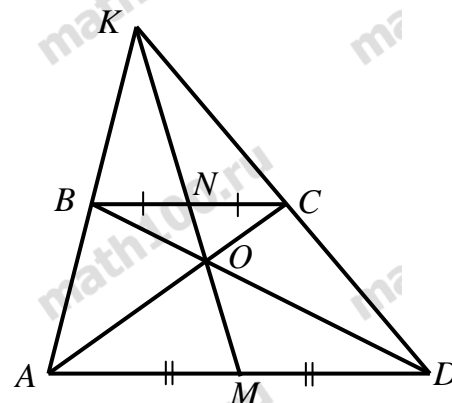
**Трапеция.** Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (боковых сторон). Трапеция, у которой боковые стороны равны, но не параллельны, называется равнобедренной или равнобокой.

**Теорема о средней линии трапеции.** Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

**Свойства трапеции**

- 1) Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника с общей вершиной. Площади треугольников, прилежащих к боковым сторонам, равны:  $S_{\triangle ABO} = S_{\triangle DCO}$ .

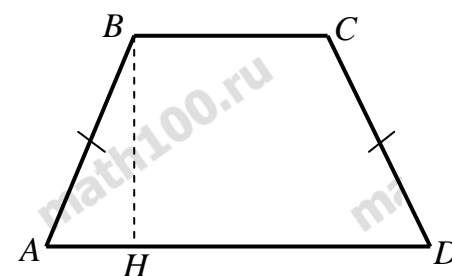
- 2) В любой трапеции с непараллельными боковыми сторонами середины оснований (точки  $M$  и  $N$ ), точка пересечения диагоналей (точка  $O$ ) и точка пересечения прямых, на которых лежат боковые стороны (точка  $K$ ), лежат на одной прямой.



- 3) В равнобокой трапеции углы при основании равны.

- 4) В равнобокой трапеции диагонали равны.

- 5) В равнобокой трапеции высота  $BH$ , опущенная на большее основание  $AD$  из конца меньшего основания  $BC$ , делит его на два отрезка, один из которых равен полуразности оснований  $AH = \frac{AD - BC}{2}$ , а другой их полусумме  $DH = \frac{AD + BC}{2}$ , (т.е. средней линии трапеции).



6) Во всякой трапеции середины боковых сторон и середины диагоналей лежат на одной прямой.

7) Во всякой трапеции с непараллельными боковыми сторонами отрезок, соединяющий середины диагоналей, параллелен основаниям и равен полуразности оснований.

8) Трапецию можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.

9) Трапецию можно описать около окружности тогда и только тогда, когда сумма оснований равна сумме боковых сторон.

10) Окружность, вписанная в равнобокую трапецию, касается оснований в их серединах.

### Формула площади трапеции

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту,

$$S = \frac{a+b}{2} h.$$

Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма противоположных углов равна  $180^\circ$ , т.е.  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$ . Верно и обратное: если сумма противоположных углов четырехугольника равна  $180^\circ$ , то около этого четырехугольника можно описать окружность.

Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда этот параллелограмм прямоугольник.

Если четырехугольник описан около окружности, то суммы противоположных сторон равны, т.е.  $AB + CD = BC + AD$ . Верно и обратное: если в выпуклом четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.

В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

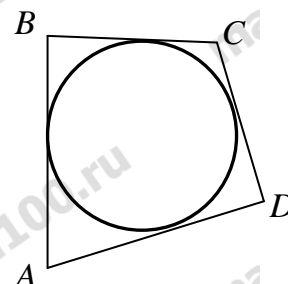
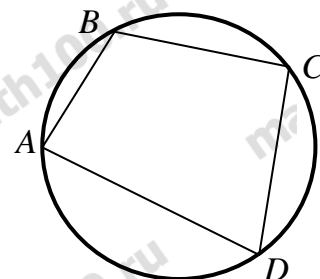
Формула Герона для четырёхугольника, около которого можно описать окружность:  $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ , где  $a, b, c, d$  – стороны этого четырёхугольника,  $p$  – полупериметр, а  $S$  – площадь.

## МНОГОУГОЛЬНИКИ

Многоугольник называется выпуклым, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей полуплоскости.

Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $180^\circ (n-2)$ .

Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь  $S = pr$ , где  $p$  – полупериметр многоугольника, а  $r$  – радиус вписанной окружности.



**Выпуклый многоугольник называется правильным**, если у него все стороны равны и все углы равны.

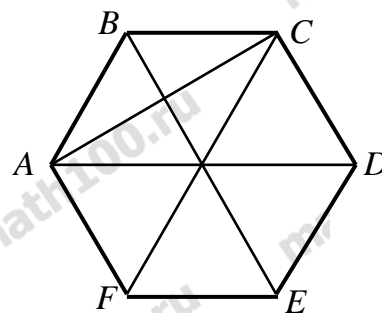
Рассмотрим **правильный шестиугольник**  $ABCDEF$ : внутренние углы правильного

шестиугольника равны  $120^\circ$ , поэтому диагонали  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  разбивают шестиугольник на 6 равных равносторонних треугольников.

Площадь шестиугольника равна площади одного из этих треугольников умноженная на 6. Диагонали  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  в два раза больше стороны шестиугольника.

Диагональ  $AC$  перпендикулярна сторонам  $CD$  и  $AF$ ,

поэтому ее можно найти по теореме Пифагора из  $\triangle ACD$  или  $\triangle ACF$ . Радиус описанной окружности равен стороне шестиугольника, а радиус вписанной окружности половине диагонали  $AC$ .



Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 17 профильного ЕГЭ по теме «Многоугольники». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

### Уровень А

**1А.** Диагональ параллелограмма делит его угол на части в  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . Найдите отношение сторон параллелограмма.

**2А.** Сторона  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  вдвое больше стороны  $AB$ . Биссектрисы углов  $A$  и  $B$  пересекают прямую  $CD$  в точках  $M$  и  $N$ , причём  $MN = 12$ . Найдите стороны параллелограмма.

**3А.** Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен  $30^\circ$ , а сторона равна 4.

**4А.** Высоты параллелограмма относятся как  $3 : 4$ . Его периметр равен 42. Найдите стороны параллелограмма.

**5А.** Стороны параллелограмма относятся как  $3 : 5$ . Меньшая диагональ 20. Периметр параллелограмма 80. Найдите площадь параллелограмма.

**6А.** Периметр параллелограмма равен 28, а его острый угол –  $60^\circ$ . Определите высоты параллелограмма, если его площадь равна  $24\sqrt{3}$ .

**7А.** Величина одного из углов параллелограмма равна  $60^\circ$ , а меньшая диагональ  $2\sqrt{31}$ . Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к большей стороне, равна  $\frac{\sqrt{75}}{2}$ . Найдите длины сторон и большой диагонали параллелограмма.



**8А.** Биссектриса угла  $A$  параллелограмма  $ABCD$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ . Найдите площадь параллелограмма, если  $BK = KC = 5$ ,  $AK = 8$ .

**9А.** В параллелограмме  $ABCD$   $\angle C = 120^\circ$ . Биссектрисы углов  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $K$ , лежащей на стороне  $AD$ ,  $CK = 3$ . Найдите площадь параллелограмма.

**10А.** Сумма длин диагоналей ромба равна 16, а его площадь равна 28. Найдите сторону ромба.

**11А.** Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной 3 и 4. Определите диагонали ромба.

**12А.** В прямоугольнике  $ABCD$   $AB = 60$ ,  $BC = 45$ . Сторона  $DC$  разделена на три равные части точками  $E$  и  $F$ . Отрезки прямых, соединяющие вершины  $A$  и  $B$  с точками  $E$  и  $F$  соответственно, продолжены до пересечения в точке  $M$ , лежащей вне прямоугольника. Найдите площадь треугольника  $EFM$ .

**13А.** В прямоугольнике проведены биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне. Определите, на какие части делится площадь прямоугольника этими биссектрисами, если стороны прямоугольника равны 2 и 4.

**14А.** Найдите длину стороны квадрата, вписанного в равнобедренный треугольник с основанием 6 и боковой стороной 5 так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие – на боковых сторонах.

**15А.** Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 7 и 8, а основания — 3 и 6.

**16А.** Найдите площадь трапеции, параллельные стороны которой равны 16 и 44, а непараллельные — 17 и 25.

**17А.** Найдите площадь трапеции с основаниями 11 и 4 и диагоналями 9 и 12.

**18А.** Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 и образует угол  $60^\circ$  с основанием трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.

**19А.** Окружность с центром  $O$  вписана в трапецию с боковой стороной  $AB$ . Найдите угол  $AOB$ .

**20А.** Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой основания 10 и 26, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.

**21А.** Найдите высоту равнобедренной трапеции, если ее диагональ перпендикулярна боковой стороне, а разность квадратов оснований равна 25.

**22А.** Дана равнобедренная трапеция, средняя линия которой равна 9, площадь равна 54 и диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите основания трапеции.

**23А.** В окружность вписана трапеция, боковая сторона которой равна 15, средняя линия 16 и большое основание является диаметром окружности. Найдите площадь трапеции.

**24А.** В окружность вписана трапеция, средняя линия которой равна 16, боковая сторона больше меньшего основания на 8 и большее основание является диаметром окружности. Найдите высоту трапеции.

**25А.** В равнобедренной трапеции основания равны 40 и 24, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

**26А.** Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если её средняя линия равна 5.

**27А.** Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

**28А.** Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а большая образует угол  $30^\circ$  с одним из оснований. Найдите это основание, если на нём лежит точка пересечения биссектрис углов при другом основании.

**29А.** Длина средней линии трапеции равна 5, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, — 3. Углы при большем основании  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите основания трапеции и её площадь.

**30А.** Периметр параллелограмма  $ABCD$  равен 80. Биссектрисы углов  $A$  и  $D$  пересекаются в точке  $M$  такой, что  $BC$  делит  $AM$  пополам. Найдите стороны параллелограмма.

**31А.**  $M$  и  $N$  — середины сторон  $BC$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$ . Известно, что  $DM \perp AC$ . Найдите отношение  $BN : CD$ .

**32А.** Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, взаимно перпендикулярны и равны 2 и 7. Найдите площадь четырёхугольника.

**33А.** Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равны между собой. Найдите площадь четырёхугольника, если его диагонали равны 8 и 12.

**34А.** Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 12. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований.

**35А.** Окружность, построенная на стороне  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  как на диаметре, проходит через вершину  $B$  и середину стороны  $BC$ . Найдите углы параллелограмма.

**36А.** Из вершины  $A$  треугольника  $ABC$  опущены перпендикуляры  $AM$  и  $AP$  на биссектрисы внешних углов  $B$  и  $C$ . Известно, что периметр треугольника  $ABC$  равен 18. Найдите  $PM$ .

**37А.** Четырёхугольник  $ABCD$ , диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром  $O$ . Найдите расстояние от точки  $O$  до стороны  $AB$ , если известно, что  $CD = 5$ .

**38А.** В трапеции  $ABCD$  углы  $A$  и  $D$  при основании  $AD$  соответственно равны  $60^\circ$  и  $90^\circ$ . Точка  $N$  лежит на основании  $BC$ , причём  $BN : BC = 2 : 3$ . Точка  $M$  лежит на основании  $AD$ , прямая  $MN$  параллельна боковой стороне  $AB$  и делит площадь трапеции пополам. Найдите  $AB : BC$ .

**39А.** Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна  $S$ . Найдите среднюю линию трапеции, если острый угол при её основании равен  $\alpha$ .

**40А.** Окружность, вписанная в трапецию, касается одной из боковых сторон в точке, делящей её на отрезки, равные  $a$  и  $b$ . Найдите радиус окружности.

**41А.** В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса  $R$ . Найдите стороны трапеции, если её меньшее основание равно  $\frac{4R}{3}$ .

**42А.** Основания трапеции равны 4 и 16. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около неё, если известно, что эти окружности существуют.

**43А.** Известно, что высота трапеции равна 15, а её диагонали равны 17 и 113. Найдите площадь трапеции.

**44А.** В четырехугольнике  $ABCD$   $AC = 12$ ,  $BD = 16$ ,  $AC \perp BD$ . Найдите расстояние между серединами сторон  $AB$  и  $CD$ .

**45А.** Диагонали  $AC$  и  $BD$  четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ , площади треугольников  $AOB$  и  $AOD$  равны соответственно 12 и 8,  $AO : OC = 4 : 5$ . Найдите площадь четырехугольника.

**46А (ЕГЭ 2005).** Найдите площадь правильного двенадцатиугольника, если его сторона равна  $6\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .

**47А (ЕГЭ 2005).** Точка  $O$  является центром правильного девятиугольника  $ABCDEFGHIK$ . Площадь треугольника  $OAD$  равна  $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ . Найдите длину перпендикуляра  $OM$ , опущенного на диагональ  $AD$ .

**48А (ЕГЭ 2005).** В правильном шестиугольнике  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  сторона равна  $8\sqrt{3}$ . Отрезок  $BC$  соединяет середины сторон  $A_3A_4$  и  $A_5A_6$ . Найдите длину отрезка, соединяющего середину стороны  $A_1A_2$  с серединой отрезка  $BC$ .

**49А (ЕГЭ 2003).** Сторона правильного шестиугольника  $ABCDEF$  равна  $32\sqrt{3}$ . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $MPK$ , если  $M$ ,  $P$  и  $K$  – середины сторон  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  соответственно.

**50А.** В окружность радиуса  $3 + \sqrt{3}$  вписан правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ACD$ .

**51А.** Один правильный шестиугольник вписан в окружность, а другой описан около нее. Найти радиус окружности, если разность периметров этих шестиугольников равна 6.

**52А.** Диагонали  $AC$  и  $BD$  параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ ,  $BD = 26$ ,  $AC = 40$ ,  $BC = 21$ . Отрезок  $OE$  – перпендикуляр к стороне  $BC$ . Найдите разность площадей четырехугольников  $DCEO$  и  $ABEO$ .

**53А (ЕГЭ 2003).** Найдите периметр параллелограмма  $ABCD$ , если  $AD = 10$ ,  $BD = 8$ , а отрезок, соединяющий вершину  $B$  с серединой стороны  $AD$ , равен  $\sqrt{15}$ .

**54А (ЕГЭ 2007).** В параллелограмме  $ABCD$  биссектриса угла  $D$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $K$  и прямую  $BC$  в точке  $P$ . Найдите периметр треугольника  $CDP$ , если  $DK = 18$ ,  $PK = 24$ ,  $AD = 15$ .

**55А** В прямоугольнике со сторонами 3 и 5 проведены биссектрисы всех углов до взаимного пересечения. Найдите площадь четырехугольника, образованного биссектрисами.

**56А.** Средняя линия трапеции разбивает ее на две трапеции, площади которых относятся как 2 : 1. Чему равно отношение оснований трапеции?

**57А.** В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из оснований равны  $40^\circ$  и  $50^\circ$ . Найдите длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований, равна 1.

**58А.** В трапеции сумма углов при большем основании равна  $90^\circ$ , сумма оснований равна  $8\sqrt{5}$ , а разность оснований равна  $5\sqrt{5}$ . Найдите площадь трапеции, если одна из боковых сторон равна 10.

**59А.** В трапеции большее основание равно 5, одна из боковых сторон равна 3. Известно, что одна из диагоналей перпендикулярна заданной боковой стороне, а другая делит угол между заданными боковой стороной и основанием пополам. Найдите площадь трапеции.

**60А.** Основания  $BC$  и  $AD$  равнобедренной трапеции  $ABCD$  равны 4 и 8 соответственно. В трапеции проведены две высоты  $CH$  и  $BN$ . Диагональ  $AC$  пересекает высоту  $BN$  в точке  $O$  и равна  $3\sqrt{5}$ . Найдите длину отрезка  $ON$ .

**61А.** Средняя линия трапеции, равная 10, делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Найдите длины оснований трапеции.

**62А.** Боковые стороны трапеции лежат на перпендикулярных прямых. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах диагоналей и в серединах оснований трапеции, если её боковые стороны равны 6 и 10.

**63А.** Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, что центр её описанной окружности лежит на большем основании.



**64А.** Трапеция с высотой  $\sqrt{3}$  вписана в окружность. Боковая сторона трапеции видна из центра окружности под углом  $120^\circ$ . Найдите среднюю линию трапеции.

**65А** Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите высоту трапеции.

**66А.** Площадь равнобедренной трапеции равна  $\sqrt{3}$ . Угол между диагональю и основанием на  $20^\circ$  больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если её диагональ равна 2.

**67А.** Трапеция  $ABCD$  разделена прямой, параллельной её основаниям  $AD$  и  $BC$ , на две равновеликие трапеции. Найдите отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, если основания трапеции равны 6 и 8.

**68А.** В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) угол  $ADB$  в два раза меньше угла  $ACB$ . Известно, что  $BC = AC = 5$  и  $AD = 6$ . Найдите площадь трапеции.

**69А (ЕГЭ 2011).** Дана трапеция  $ABCD$  с боковыми сторонами  $AB = 36$ ,  $CD = 34$  и верхним основанием  $BC = 10$ . Известно, что  $\cos \angle ABC = -\frac{1}{3}$ . Найдите  $BD$ .

### ОТВЕТЫ

1А.  $\sqrt{2} : 1$ . 2А. 4; 8. 3А. 1. 4А. 9; 12. 5А. 300. 6А.  $3\sqrt{3}$ ;  $4\sqrt{3}$ . 7А. 10; 12;  $2\sqrt{91}$ .  
 8А. 48. 9А.  $9\sqrt{3}$ . 10А. 6. 11А.  $2\sqrt{14}$ ;  $2\sqrt{35}$ . 12А. 225. 13А. 2; 2; 4. 14А. 2,4.  
 15А.  $12\sqrt{5}$ . 16А. 450. 17А. 54. 18А. 5. 19А.  $90^\circ$ . 20А. 216. 21А. 2,5. 22А. 5; 13.  
 23А. 192. 24А. 12. 25А. 1024. 26А. 25. 27А. 9; 39. 28А. 9. 29А. 2; 8;  $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ .  
 30А. 8; 32. 31А. 3 : 2. 32А. 14. 33А. 48. 34А. 12. 35А.  $60^\circ$ ;  $120^\circ$ . 36А. 9. 37А.  
 2,5. 38А. 4 : 3. 39А.  $\sqrt{\frac{S}{\sin \alpha}}$ . 40А.  $\sqrt{ab}$ . 41А.  $2R$ ;  $\frac{10R}{3}$ ;  $4R$ . 42А. 4;  $\frac{5\sqrt{41}}{4}$ .  
 43А. 900; 780. 44А. 10. 45А. 45. 46А. 108. 47А. 2,5. 48А. 18. 49А. 24. 50А.  $\sqrt{3}$ .  
 51А.  $2\sqrt{3} + 3$ . 52А. 66. 53А. 28. 54А. 112. 55А. 2. 56А. 5 : 1. 57А. 3; 5. 58А. 40.  
 59А. 9,6. 60А. 1. 61А. 5; 15. 62А. 15. 63А.  $8\sqrt{5}$ ;  $4\sqrt{5}$ . 64А. 1. 65А.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ . 66А.  
 $40^\circ$ ;  $80^\circ$ . 67А.  $5\sqrt{2}$ . 68А. 22. 69А. 36;  $8\sqrt{19}$ .

**Уровень В**

**1В.** В трапеции  $ABCD$  площадью, равной 30, диагонали  $AC$  и  $BD$  взаимно перпендикулярны, а  $\angle BAC = \angle CDB$ . Продолжения боковых сторон  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $K$ .

а) Докажите, что трапеция  $ABCD$  — равнобедренная.

б) Найдите площадь треугольника  $AKD$ , если известно, что  $\angle AKD = 30^\circ$ , а  $BC < AD$ .

**Решение**

**2В.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  точки  $K$ ,  $M$ ,  $P$ ,  $E$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , и  $DA$  соответственно.

а) Докажите, что площадь четырёхугольника  $KMPE$  равна половине площади четырёхугольника  $ABCD$ .

б) Найдите большую диагональ четырёхугольника  $KMPE$ , если известно, что  $AC = 6$ ,  $BD = 8$ , а сумма площадей треугольников  $AKE$  и  $CMF$  равна  $3\sqrt{3}$ .

**Решение**

**3В.** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $E$  — середина стороны  $AD$ . Отрезок  $BE$  пересекает диагональ  $AC$  в точке  $P$ ,  $AB = PD$ .

а) Докажите, что отрезок  $BE$  перпендикулярен диагонали  $AC$ .

б) Найдите площадь параллелограмма, если  $AB = 2$ ,  $BC = 3$ .

**Решение**

**4В.** В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ),  $\angle ABC = 90^\circ$ . Прямая, перпендикулярная стороне  $CD$ , пересекает сторону  $AB$  в точке  $M$ , а сторону  $CD$  — в точке  $N$ .

а) Докажите подобие треугольников  $ABN$  и  $DCM$ .

б) Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BN$ , если  $MC = 5$ ,  $BN = 3$ , а расстояние от точки  $D$  до прямой  $MC$  равно 6.

**Решение**

**5В.** На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.

б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 16, а один из его углов равен  $60^\circ$ .

**Решение**

**6В.** Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ .

а) Докажите, что отрезки  $LN$  и  $KM$ , соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырёхугольника  $ABCD$ , если  $LM = 3\sqrt{3}$ ,  $KM = 6\sqrt{3}$ ,  $\angle KML = 60^\circ$ .

**Решение**

**7В.** Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром  $O$ . Диагонали четырёхугольника перпендикулярны, пересекаются в точке  $P$ , отличной от  $O$ , и не проходят через точку  $O$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  соответственно.

а) Докажите, что прямая  $OP$  проходит через середину отрезка  $MN$ .

б) Найдите площадь четырёхугольника  $OMPN$ , если  $AC = BD$ , а  $MN = 10$ .

**Решение**

**8В.** В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трёх сторон параллелограмма каждая.

а) Докажите, что одна из сторон параллелограмма видна из центра одной из окружностей под прямым углом.

б) Найдите площадь параллелограмма, если радиус одной из окружностей равен 2, а один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания с одной из окружностей равен 4.

**Решение**

**9В.** Отрезок, соединяющий вершину  $A$  ромба  $ABCD$  с серединой стороны  $BC$ , равен стороне ромба.

а) Докажите, что высота ромба, проведённая из вершины  $C$ , делит сторону  $AD$  на отрезки, один из которых втрое больше другого.

б) Найдите диагональ  $AC$  ромба, если сторона ромба равна  $\sqrt{6}$ .

**Решение**

**10В** Окружность, построенная на стороне  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что  $ABCD$  — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону  $AB$  в точке  $M$ , причём  $AM : MB = 2 : 1$ . Найдите диагональ  $AC$ , если  $AD = \sqrt{6}$ .

**Решение**

**11В (ЕГЭ 2016).** Прямая, проходящая через вершину  $B$ , прямоугольника  $ABCD$ , перпендикулярна диагонали  $AC$  и пересекает сторону  $AD$  в точке  $M$ , равноудаленной от вершин  $B$  и  $D$ .

- а) Докажите, что  $BM$  и  $BD$  делят угол  $B$  на три равных угла.
- б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника  $ABCD$  до прямой  $CM$ , если  $BC = 6\sqrt{21}$ .

**Решение**

**12В (ЕГЭ 2014).** Диагональ  $AC$  разбивает трапецию  $ABCD$  с основанием  $AD$  и  $BC$ , из которых  $AD$  большее, на два подобных треугольника.

- а) Докажите, что  $\angle ABC = \angle ACD$ .
- б) Найдите отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, если известно, что  $BC = 18$ ,  $AD = 50$  и  $\cos \angle CAD = \frac{3}{5}$ .

**Решение**

**13В (ЕГЭ 2017).** Точки  $E$  и  $K$  — соответственно середины сторон  $CD$  и  $AD$  квадрата  $ABCD$ . Прямая  $BE$  пересекается с прямой  $CK$  в точке  $O$ .

- а) Докажите, что вокруг четырёхугольника  $ABOK$  можно описать окружность.
- б) Найдите  $AO$ , если сторона квадрата равна 1.

**Решение**

**14В.** Окружность с центром  $O$  вписана в равнобедренную трапецию  $ABCD$  с боковой стороной  $AB$ .

- а) Докажите, что треугольник  $AOB$  прямоугольный.
- б) Найдите площадь трапеции, если радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении 1 : 4.

**Решение**

**15В.** Окружность с центром  $O$  вписана в равнобедренную трапецию  $ABCD$  с боковой стороной  $AB$ . Прямые  $AO$  и  $BC$  пересекаются в точке  $E$ .

- а) Докажите, что  $O$  — середина  $AE$ .
- б) Найдите радиус окружности, если  $AB = 30$ ,  $BO = 3\sqrt{10}$ .

**Решение**



**16В.** Через вершину  $B$  трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  проведена прямая, параллельная диагонали  $AC$ . Пусть эта прямая пересекается с продолжением основания  $AD$  в точке  $E$ .

- а) Докажите, что треугольник  $DBE$  равновелик трапеции  $ABCD$ .
- б) Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 10 и 24, а средняя линия равна 13.

**Решение**

**17В.** Боковая сторона  $CD$  трапеции  $ABCD$  равна основанию  $AD$ .

- а) Докажите, что  $CA$  — биссектриса угла  $BCD$ .
- б) Прямая, проходящая через вершину  $C$  перпендикулярно  $CD$ , пересекает боковую сторону  $AB$  в точке  $M$ . Найдите отношение  $BM : AM$ , если известно, что  $AD = CD = 2BC$  и  $\angle ADC = 60^\circ$ .

**Решение**

**18В.** Диагональ  $AC$  трапеции  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  является биссектрисой угла  $BCD$ .

- а) Докажите, что  $AD = CD$ .
- б) Прямая, проходящая через вершину  $D$  перпендикулярно  $AC$ , пересекает боковую сторону  $AB$  в точке  $M$ . Найдите отношение  $BM : AM$ , если  $AD = 2BC$ .

**Решение**

**19В.** Прямая, параллельная основаниям  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$ , пересекает боковые стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, а диагонали  $AC$  и  $BD$  — в точках  $K$  и  $L$  соответственно, причём точка  $K$  лежит между  $M$  и  $L$ .

- а) Докажите, что  $ML = KN$ .
- б) Найдите  $MN$ , если  $BC = 2$ ,  $AD = 3$  и  $MK : KL : LN = 3 : 1 : 3$ .

**Решение**

**20В.** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Диагональ  $BD$  разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями  $AD$  и  $CD$ .

- а) Докажите, что луч  $AC$  — биссектриса угла  $BAD$ .
- б) Найдите  $CD$ , если известны диагонали трапеции:  $AC = 15$  и  $BD = 8,5$ .

**Решение**

**21В (ЕГЭ 2017).** Известно, что  $ABCD$  трапеция,  $AD = 2BC$ ,  $AD$ ,  $BC$  — основания. Точка  $M$  такова, что углы  $ABM$  и  $MCD$  прямые.

а) Доказать, что  $MA = MD$ .

б) Расстояние от  $M$  до  $AD$  равно  $BC$ , а угол  $ADC$  равен  $55^\circ$ . Найдите угол  $BAD$ .

[Решение](#)

**22В (ЕГЭ 2017).** Дана равнобедренная трапеция, в которой  $AD = 3BC$ ,  $CM$  — высота трапеции.

а) Доказать, что  $M$  делит  $AD$  в отношении  $2:1$ .

б) Найдите расстояние от точки  $C$  до середины  $BD$ , если  $AD = 18$ ,  $AC = 4\sqrt{13}$ .

[Решение](#)

**23В (ЕГЭ 2017).** Дана трапеция с диагоналями равными 8 и 15. Сумма оснований равна 17.

а) Докажите, что диагонали перпендикулярны.

б) Найдите площадь трапеции.

[Решение](#)

**24В (ЕГЭ 2018).** В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  углы  $ABD$  и  $ACD$  прямые.

а) Докажите, что  $AB = CD$ .

б) Найдите  $AD$ , если  $AB = 2$ ,  $BC = 7$ .

[Решение](#)

**25В.** В равнобедренную трапецию  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  вписана окружность,  $CH$  — высота трапеции.

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в трапецию, лежит на отрезке  $BH$ .

б) Найдите диагональ  $AC$ , если средняя линия трапеции равна  $2\sqrt{7}$ , а  $\angle AOD = 120^\circ$ , где  $O$  — центр окружности, вписанной в трапецию, а  $AD$  — большее основание.

[Решение](#)

**26В.** В равнобедренную трапецию  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  вписана окружность с центром  $O$ ,  $CH$  — высота трапеции.

- а) Докажите, что треугольник  $ABH$  равнобедренный.
- б) Найдите площадь треугольника  $ACH$ , если боковая сторона трапеции равна 2,  $\angle BOC = 60^\circ$ , а  $BC$  — меньшее основание.

**Решение**

**27В.** Точки  $L$  и  $N$  — середины оснований  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$  соответственно, а точки  $K$  и  $M$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  соответственно. Известно, что  $KM = LN$ .

- а) Докажите, что сумма углов при одном из оснований трапеции равна  $90^\circ$ .
- б) Найдите высоту трапеции, если площадь четырёхугольника  $KLMN$  равна 12, а разность оснований трапеции равна 10.

**Решение**

**28В.** Окружность, проходящая через вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ , вторично пересекает прямую  $AD$  в точке  $M$ .

- а) Докажите, что  $AC = BM$ .
- б) Найдите  $AC$ , если  $AD = 16$ ,  $CD = 8\sqrt{3}$  и  $\angle AMB = 60^\circ$ .

**Решение**

**29В.** Дана трапеция, в которую можно вписать окружность и около которой можно описать окружность.

- а) Докажите, что проекция диагонали этой трапеции на большее основание равна боковой стороне.
- б) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей, если основания трапеции равны 3 и 27.

**Решение**

**30В.** Дана трапеция, в которую можно вписать окружность и около которой можно описать окружность.

- а) Докажите, что проекция диагонали этой трапеции на большее основание равна полусумме оснований.
- б) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей, если диагональ трапеции равна  $\sqrt{41}$ , а большее основание равно 8.

**Решение**

**31В.** В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) угол  $ADB$  в два раза меньше угла  $ACB$  и  $BC = AC$ .

- а) Докажите, что точки  $A$ ,  $B$  и  $D$  лежат на окружности с центром  $C$ .
- б) Найдите площадь трапеции, если  $BC = 5$  и  $AD = 6$ .

**Решение**

**32В.** Окружность с центром  $O_1$  вписана в прямоугольную трапецию  $ABCD$  с прямым углом при вершине  $A$ . Окружность с центром  $O_2$  касается большей боковой стороны  $CD$  и продолжений оснований трапеции.

а) Докажите, что  $O_1CO_2D$  — прямоугольник.

б) Найдите площадь этого прямоугольника, если точка касания  $M$  вписанной в трапецию окружности делит меньшее основание на отрезки  $BM = 6$  и  $CM = 4$ .

**Решение**

**33В.** В окружность вписаны две трапеции. Основания и боковые стороны одной из них соответственно параллельны основаниям и боковым сторонам другой.

а) Докажите, что диагонали одной трапеции равны диагоналям другой.

б) Найдите отношение площадей этих трапеций, если известно, что боковая сторона одной из них равна радиусу окружности, а боковая сторона другой в два раза меньше.

**Решение**

**34В.** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Точки  $M$  и  $N$  лежат на сторонах  $AB$  и  $CD$  соответственно, причём отрезок  $MN$  параллелен основаниям трапеции. Диагональ  $AC$  пересекает этот отрезок в точке  $O$ . Известно, что площади треугольников  $AMO$  и  $CNO$  равны.

а) Докажите, что  $CM \parallel AN$ .

б) Найдите  $MN$ , если  $AD = 4$  и  $BC = 9$ .

**Решение**

**35В.** Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ .

а) Докажите, что прямая, проходящая через вершину  $B$  и середину отрезка  $OC$ , делит сторону  $CD$  на отрезки, один из которых вдвое больше другого.

б) Пусть  $ABCD$  — ромб с диагоналями  $BD = 18$ ,  $AC = 48$ . Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри ромба.

**Решение**

**36В (ЕГЭ 2021).** Дан параллелограмм  $ABCD$  с острым углом  $A$ . На продолжении стороны  $AD$  за точку  $D$  взята точка  $N$  такая, что  $CN = CD$ , а на продолжении стороны  $CD$  за точку  $D$  взята такая точка  $M$ , что  $AD = AM$ .

а) Докажите, что  $BM = BN$ .

б) Найдите  $MN$ , если  $AC = 4$ ,  $\sin \angle BAD = \frac{8}{17}$ .

**Решение**



**37В (ЕГЭ 2021).** В равнобедренной трапеции  $ABCD$  меньшее основание  $BC$  равно боковой стороне. На плоскости выбрали точку  $E$  такую, что прямая  $BE$  перпендикулярна прямой  $AD$ , а прямая  $CE$  перпендикулярна прямой  $BD$ .

а) Докажите, что  $\angle AEB = \angle ADB$ .

б) Найдите площадь трапеции  $ABCD$ , если  $AB = 32$ ,  $\cos \angle AEB = \frac{3}{4}$ .

**Решение**

**38В (ЕГЭ 2022).** Дана равнобедренная трапеция  $ABCD$ . На боковой стороне  $AB$  и большем основании  $AD$  взяты соответственно точки  $F$  и  $E$  так, что  $FE$  параллельно  $CD$ , а  $FC = ED$ .

а) Докажите, что  $\angle BCF = \angle AFE$ .

б) Найдите площадь трапеции  $ABCD$ , если  $ED = 3 BF$ ,  $FE = 5$  и площадь трапеции  $FCDE$  равна  $14\sqrt{35}$ .

**Решение**

**39В (ЕГЭ 2022).** В параллелограмме  $ABCD$  угол  $BAC$  вдвое больше угла  $CAD$ . Биссектриса угла  $BAC$  пересекает отрезок  $BC$  в точке  $L$ . На продолжении стороны  $CD$  за точку  $D$  выбрана такая точка  $E$ , что  $AE = CE$ .

а) Докажите, что  $AL \cdot BC = AB \cdot AC$ .

б) Найдите  $EL$ , если  $AC = 12$ ,  $\operatorname{tg} \angle BCA = \frac{1}{4}$ .

**Решение**

**40В (ЕГЭ 2022).** На стороне  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  выбрана точка  $M$  такая, что  $AM = MC$ .

а) Докажите, что центр вписанной в треугольник  $AMD$  окружности лежит на диагонали  $AC$ .

б) Найдите радиус вписанной в треугольник  $AMD$  окружности, если  $AB = 7$ ,  $BC = 21$ , а  $\angle DAB = 60^\circ$ .

**Решение**

**41В (ЕГЭ 2022).** В квадрате  $ABCD$  точки  $M$  и  $N$  – середины сторон  $AB$  и  $BC$ , соответственно. Отрезки  $CM$  и  $DN$  пересекаются в точке  $K$ .

а) Докажите, что  $\angle BKM = 45^\circ$ .

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABK$ , если  $AB = 2\sqrt{20}$ .

**Решение**

**42В (ЕГЭ 2022).** В трапеции  $ABCD$  с основанием  $AD$  диагонали пересекаются в точке  $O$ ,  $AD = 2BC$ . Через вершину  $A$  проведена прямая параллельная диагонали  $BD$ , а через вершину  $D$  проведена прямая параллельная диагонали  $AC$ , и эти прямые пересекаются в точке  $E$ .

а) Докажите, что  $BO : AE = 1 : 2$ .

б) Прямые  $BE$  и  $CE$  пересекают сторону  $AD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Найдите  $MN$ , если  $AD = 10$ .

**Решение**

**43В (ЕГЭ 2023).** Дан ромб  $ABCD$ . Прямая, перпендикулярная стороне  $AD$ , пересекает его диагональ  $AC$  в точке  $M$ , диагональ  $BD$  — в точке  $N$ , причём  $AM : MC = 1 : 2$ ,  $BN : ND = 1 : 3$ .

а) Докажите, что  $\cos \angle BAD = 0,2$ .

б) Найдите площадь ромба, если  $MN = 5$ .

**Решение**

**44В (ЕГЭ 2023).** Прямая, перпендикулярная стороне  $BC$  ромба  $ABCD$ , пересекает его диагональ  $AC$  в точке  $M$ , а диагональ  $BD$  в точке  $N$ , причём  $AM : MC = 1 : 2$ ,  $BN : ND = 1 : 3$ .

а) Докажите, что прямая  $MN$  делит сторону ромба  $BC$  в отношении  $1 : 4$ .

б) Найдите сторону ромба, если  $MN = \sqrt{6}$ .

**Решение**

**45В (ЕГЭ 2023).** Биссектрисы углов  $BAD$  и  $BCD$  равнобедренной трапеции  $ABCD$ , с основаниями  $AD$  и  $BC$ , пересекаются в точке  $O$ . Через точку  $O$  провели прямую, параллельную основаниям трапеции.

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если известно, что  $AO = OC$ , данная прямая пересекает сторону  $AB$  в точке  $M$  и делит её в отношении  $AM : MB = 2 : 3$ .

**Решение**

**46В (ЕГЭ 2023).** Биссектриса  $AM$  острого угла  $A$  равнобедренной трапеции  $ABCD$  делит боковую сторону  $CD$  пополам. Отрезок  $DN$  перпендикулярен отрезку  $AM$  и делит сторону  $AB$  в отношении  $AN : NB = 7 : 1$ .

а) Докажите, что прямые  $BM$  и  $CN$  перпендикулярны.

б) Найдите длину отрезка  $MN$ , если площадь трапеции равна  $4\sqrt{55}$ .

**Решение**

**47В (ЕГЭ 2023).** К окружности, вписанной в квадрат  $ABCD$ , проведена касательная, пересекающая стороны  $AB$  и  $AD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника  $AMN$  равен стороне квадрата.

б) Прямая  $MN$  пересекает прямую  $CD$  в точке  $P$ . В каком отношении делит сторону  $BC$  прямая, проходящая через точку  $P$  и центр окружности, если  $AM : MB = 1 : 3$ ?

### Решение

### ОТВЕТЫ

1В. 45. 2В.  $\sqrt{37}$ . 3В.  $\sqrt{35}$ . 4В. 3,6. 5В. 6. 6В.  $54\sqrt{3}$ . 7В. 50. 8В. 36. 9В. 3.  
10В.  $2\sqrt{5}$ . 11В. 3. 12В.  $8\sqrt{13}$ . 13В. 1. 14В. 20. 15В. 9. 16В. 120. 17В.  $1 : 2$ .  
18В.  $1 : 2$ . 19В.  $\frac{42}{17}$ . 20В. 8. 21В.  $80^\circ$ . 22В. 4. 23В. 60. 24В. 8. 25В. 7. 26В.  $\sqrt{3}$ .  
27В. 4,8. 28В. 8. 29В. 10. 30В.  $\frac{15}{8}$ . 31В. 22. 32В. 78. 33В.  $4 : \sqrt{5}$ . 34В. 6. 35В.  
20. 36В.  $\frac{120}{17}$ . 37В.  $432\sqrt{7}$ . 38В.  $\frac{73\sqrt{35}}{4}$ . 39В. 4,7. 40В.  $\frac{\sqrt{3}(34 - \sqrt{127})}{14}$ . 41В.  
 $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ . 42В. 2. 43В.  $60\sqrt{6}$ . 44В. 6. 45В.  $7 : 17$ . 46В. 4. 47В.  $1 : 3$ .