

ПРИМЕНЕНИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

В этом разделе будут рассмотрены уравнения и системы уравнений с параметрами, ключевым признаком которых является инвариантность. Типичные формулировки таких задач следующие: «Найдите все значения параметра a , при которых уравнение (или система уравнений) имеет единственное решение». Слово «единственное» в формулировке таких задач является ключевым. Оно, как правило, служит сигналом для проверки уравнения, неравенства или системы уравнений на инвариантность. Слово «инвариантность» означает «неизменность». В математике под инвариантностью понимается неизменяемость каких-либо выражений с переменными или функций по отношению к каким-либо преобразованиям над этими самими переменными.

Самым простым примером инвариантности является четность функции: если $y = f(x)$ является четной функцией, то эта функция инварианта относительно замены x на $-x$, т.е. если значение x_0 является решением уравнения $f(x) = 0$, то и значение $-x_0$ также будет являться его решением, поэтому чтобы уравнение $f(x) = 0$ имело единственное решение, необходимо чтобы $x_0 = 0$.

Например, уравнение $f(x) + f(b - x) = 0$ (где b – произвольное действительное число) не изменится от замены x на $b - x$, поэтому если x_0 является решением этого уравнения, то и $b - x_0$ также будет являться его решением, поэтому чтобы уравнение $f(x) + f(b - x) = 0$ имело единственное решение, необходимо чтобы $x_0 = b - x_0$, т.е. $x_0 = \frac{b}{2}$.

Система уравнений может быть инвариантна относительно замены x на $-x$ (в этом случае для единственности решения необходимо чтобы $x = 0$), замены y на $-y$ (в этом случае для единственности решения необходимо чтобы $y = 0$), замены x на y , а y на x (в этом случае для единственности решения необходимо чтобы $x = y$).

Бывают и менее очевидные инвариантности нахождение которых является достаточно сложным процессом. Таким образом, если в формулировке задачи требуется найти значение параметра a , при которых решение единственное, нужно проверить не обладает ли уравнение, неравенство или система уравнений свойством инвариантности. В случае, если удалось найти замену в результате которой уравнение не изменилось, то следует решать задачу придерживаясь следующего алгоритма:

- 1) найти корень, который может являться единственным решением;

2) подставить найденный корень в исходное уравнение, неравенство или систему уравнений и найти соответствующие этому корню значения параметра. Казалось бы, параметры найдены и можно их записывать в ответ, но никто не гарантирует, что при этих значениях параметров решение будет единственным. Найденные на этом этапе значения параметра представляют собой лишь так называемое *необходимое* условие единственности решения, но, к сожалению, **не достаточное!**;

3) проверка на **достаточность**: каждое из найденных значений параметра подставляем в исходное уравнение, неравенство или систему уравнений. Решаем исходную задачу для каждого такого значения параметра и устанавливаем, сколько решений в каждом случае получается. Те значения параметра, при которых задача имеет более одного решения, отбрасываем.

Пункт 3 в подобных задачах зачастую наиболее трудоёмкий, потому что далеко не всегда при этом получаются уравнения и системы уравнений, решаемые стандартными алгебраическими преобразованиями. Часто приходится использовать свойства монотонности и ограниченности функции, рассмотренные в предыдущем разделе (https://math100.ru/prof-ege_2022_17-6/).

Пример 1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2a \sin(\cos x) + 2 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если x_0 является решением исходного уравнения, то и $-x_0$ также является решением, т.е. уравнение инвариантно относительно замены x на $-x$. Для единственности решения необходимо выполнение условия $x_0 = 0$ (пункт 1). Подставляя это значение x в исходное

уравнение, получим значение параметра $a = \frac{1}{\sin 1}$, которое является «кандидатом

в ответ» (пункт 2). Подставим найденное значение параметра в исходное

уравнение: $x^2 - \frac{2 \sin(\cos x)}{\sin 1} + 2 = 0$. Осталось выяснить: имеет ли полученное

уравнение еще корни кроме $x = 0$ (пункт 3)? Для этого перепишем последнее

уравнение в виде: $x^2 + 2 = \frac{2 \sin(\cos x)}{\sin 1}$. Левая часть этого уравнения принимает

значения $[2; \infty)$. Разберемся с правой частью: $\cos x$ принимает значения $[-1; 1]$,

следовательно, $\sin(\cos x)$ принимает значения $[-\sin 1; \sin 1]$, а вся правая часть

последнего уравнения принимает значения $[-2; 2]$. Следовательно, последнее

уравнение выполняется только в случае, если его левая и правая части равны 2, а

это возможно только при $x = 0$. Таким образом, исходное уравнение имеет

единственное решение только при $a = \frac{1}{\sin 1}$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^2 + 2) = y - |x| + 5, \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением данной системы, то пара $(-x_0; y_0)$ – тоже ее решение, т.е. система уравнений инвариантна относительно замены x на $-x$. Для единственности решения необходимо выполнение условия $x_0 = 0$ (пункт 1). Подставляя это значение x в исходную систему, получаем необходимые значения параметра $a = 0$ и $a = 5$, которые являются «кандидатами в ответ» (пункт 2).

Важно понимать, что условие $x_0 = 0$ является необходимым, но не является достаточным. Достаточность проверим подстановкой значений $a = 0$ и $a = 5$ в исходную систему (пункт 3).

При $a = 0$ система принимает вид

$$\begin{cases} y = |x| - 5, \\ x^2 + y^2 = 25, \end{cases}$$

из которой следует три решения $(0; -5), (5; 0), (-5; 0)$.

При $a = 5$ система принимает вид

$$\begin{cases} a(x^2 + 2) = y - |x| + 5, \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x^2 + |x| + 5, \\ y^2 = 25 - x^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения $y \geq 5$, а из второго $|y| \leq 5$. Следовательно, пара чисел $(0; 5)$ является единственным решением. Таким образом, исходная система имеет единственное решение при $a = 5$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^4 + (a - 3)^2 = |x - a + 3| + |x + a - 3|$$

имеет единственное решение.

Решение. Обозначим $a - 3 = b$, тогда уравнение примет следующий вид $x^4 + b^2 - |x - b| - |x + b| = 0$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^4 + b^2 - |x - b| - |x + b|$$

которая является четной. Действительно:

$$f(-x) = (-x)^4 + b^2 - |-x - b| - |-x + b| = x^4 + b^2 - |x + b| - |x - b| = f(x).$$

Следовательно, если x_0 является решением уравнения, то и $-x_0$ также является решением, т.е. уравнение инвариантно относительно замены x на $-x$. Для единственности решения необходимо выполнение условия $x_0 = 0$ (пункт 1).

Подставляя это значение x в последнее уравнение, получим $b^2 - 2|b| = 0$, откуда

$|b|(|b|-2)=0$, $b_1=0$, $b_2=2$, $b_3=-2$ (пункт 2). Осталось найденные значения b подставить в последнее уравнение и определить сколько оно имеет решений при каждом значении b (пункт 3). Если $b=0$, то получим уравнение $x^4-2|x|=0$, которое можно записать в виде $|x|^4-2|x|=0$ или $|x|(|x|^3-2)=0$, откуда $x_1=0$, $x_2=-\sqrt[3]{2}$, $x_3=\sqrt[3]{2}$. Следовательно, при $b=0$ уравнение имеет три решения, поэтому это значение b не удовлетворяет условию задачи. Если $b=2$ или $b=-2$, то получим одно и то же уравнение $x^4+4-|x-2|-|x+2|=0$, которое решим методом интервалов. Если $x<-2$, то $x^4+4+x-2+x+2=0$ или $x^4+2x+4=0$. Нам требуется определить имеет ли последнее уравнение решения при $x<-2$. Переписав его в виде $x(x^3+2)+4=0$, можно сделать вывод, что множители x и x^3+2 при $x<-2$ отрицательны, поэтому $x(x^3+2)>0$ и при $x<-2$ решений нет. Если $-2\leq x\leq 2$, то $x^4+4+x-2-x-2=0$ или $x^4=0$, которое имеет единственное решение $x=0$, удовлетворяющее условию $-2\leq x\leq 2$. Если $x>2$, то $x^4+4-x+2-x-2=0$ или $x^4-2x+4=0$. Переписав его в виде $x(x^3-2)+4=0$, можно сделать вывод, что множители x и x^3-2 при $x>2$ положительны, поэтому $x(x^3-2)>0$ и при $x>2$ решений нет. Следовательно, при $b=2$ и $b=-2$ уравнение имеет одно решение. Возвращаясь к замене $a-3=b$, получаем $a_1=5$ и $a_2=1$.

Пример 4 (ЕГЭ 2018). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = a^2 - 3a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Заметим, что если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением данной системы, то пары $(y_0; x_0)$, $(-x_0; -y_0)$, $(-y_0; -x_0)$ – тоже ее решения, т.е. система уравнений будет иметь 4 решения. Поскольку по условию задачи решений должно быть два, то полученные пары должны совпадать. Всего возможно 6 вариантов. Рассмотрим каждый случай отдельно:

1) если $(x_0; y_0) = (y_0; x_0)$, то $x_0 = y_0$. Тогда система уравнений примет вид:
$$\begin{cases} 2x^2 = a^2, \\ x^2 = a^2 - 3a. \end{cases}$$
 Из которой: $a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = 6. \end{cases}$ При $a = 0$ система примет вид
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ xy = 0 \end{cases}$$
 которая имеет одно решение $x = y = 0$, т.е. $a = 0$ не

удовлетворяет условию задачи. При $a = 6$ система примет вид
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ xy = 18 \end{cases}$$

которая имеет два решения $(\sqrt{18}; \sqrt{18})$, $(-\sqrt{18}; -\sqrt{18})$, т.е. $a = 6$ удовлетворяет условию задачи;

2) если $(x_0; y_0) = (-x_0; -y_0)$, то $x_0 = y_0 = 0$. Тогда $a = 0$, это значение параметра рассмотрено в первом случае;

3) если $(x_0; y_0) = (-y_0; -x_0)$, то $x_0 = -y_0$. Тогда система уравнений примет вид:
$$\begin{cases} 2x^2 = a^2, \\ -x^2 = a^2 - 3a. \end{cases}$$
 Из которой: $3a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = 2. \end{cases}$ Значение $a = 0$

рассмотрено в первом случае. При $a = 2$ система примет вид
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ xy = -2 \end{cases}$$

которая имеет два решения $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, т.е. $a = 2$ удовлетворяет условию задачи;

4) если $(y_0; x_0) = (-x_0; -y_0)$, то $x_0 = -y_0$. Смотри третий случай;

5) если $(y_0; x_0) = (-y_0; -x_0)$, то $x_0 = y_0 = 0$. Смотри второй случай.

6) если $(-x_0; -y_0) = (-y_0; -x_0)$, то $x_0 = y_0$. Смотри первый случай.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при $a = 2$ и $a = 6$.

Приведенный выше пример показывает, что применять инвариантность можно не только в задачах, где решение должно быть единственным.

Пример 5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$9^{-x+1} \cdot 3^{x^2} + a^3 + 5a^2 + a + \sqrt{2} = \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} + 3$$

имеет единственное решение.

Решение. Обозначим $b = a^3 + 5a^2 + a$ и преобразуем уравнение следующим образом:

$$9 \cdot 3^{-2x} \cdot 3^{x^2} + b + \sqrt{2} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi x}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi x}{4} \right) + 3$$

$$9 \cdot 3^{x^2-2x} + b + \sqrt{2} = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi x}{4} \right) + 3$$

$$9 \cdot 3^{x(x-2)} + b + \sqrt{2} = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + 3$$

$$9 \cdot 3^{x(x-2)} + b + \sqrt{2} = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} (x-1) \right) + 3.$$

Последнее уравнение не изменится, если заменить x на $2-x$. Действительно:

$$9 \cdot 3^{(2-x)((2-x)-2)} + b + \sqrt{2} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}(2-x-1)\right) + 3$$

$$9 \cdot 3^{(2-x)(-x)} + b + \sqrt{2} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right) + 3$$

$$9 \cdot 3^{x(x-2)} + b + \sqrt{2} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right) + 3.$$

Следовательно, оно инвариантно относительно замены x на $2-x$. Для единственности решения необходимо выполнение условия $x = 2-x$, откуда $x = 1$ (пункт 1). Подставляя это значение x в последнее уравнение, получим $3 + b + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 3$, откуда $b = 0$ (пункт 2). Подставим $b = 0$ в последнее уравнение и выясним сколько оно имеет решений при этом значении b (пункт 3):

$$3 \cdot 3^{(x-1)^2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right) + 3.$$

Оценим левую и правую части последнего уравнения (см. предыдущий раздел). Так как $(x-1)^2 \geq 0$ и значения косинуса $[-1; 1]$, то левая часть принимает значения $[3 + \sqrt{2}; \infty)$, а правая $[3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}]$. Значит, последнее уравнение, согласно утверждению 3 из предыдущего раздела, сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 3^{(x-1)^2} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}, \\ \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right) + 3 = 3 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Корнем первого уравнения является $x = 1$, который удовлетворяет и второму уравнению. Следовательно, при $b = 0$ уравнение имеет одно решение. Возвращаясь к замене $b = a^3 + 5a^2 + a$ найдем значение параметра a : $a^3 + 5a^2 + a = 0$ откуда $a = 0$ и $a = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Пример 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2^{\frac{1}{x}} = (|a| - 3)^2 + \cos^2 y + 4, \\ \left(y^2 - \pi y + \frac{\pi^2}{4}\right) z^2 + z^2 - \frac{2}{9} a^2 z + a + 4 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Система уравнений не изменится при замене x на $\frac{1}{x}$, т.е. система уравнений инвариантна относительно замены x на $\frac{1}{x}$. Следовательно,

исходная система уравнений будет иметь единственное решение, если $x = \frac{1}{x}$ (пункт 1), откуда $x = \pm 1$. Рассмотрим каждый корень отдельно (пункт 2). При $x = -1$ первое уравнение системы примет вид $(|a| - 3)^2 + \cos^2 y + 3 = 0$, которое не имеет решений, т.к. первые два слагаемых в левой части неотрицательны и левая часть принимает значения $[3; \infty)$, т.е. не может равняться 0. Значит при $x = -1$ система уравнений не имеет решений. Рассмотрим случай когда $x = 1$. В этом случае первое уравнение системы примет следующий вид $(|a| - 3)^2 + \cos^2 y = 0$.

Последнее равенство может выполняться, только если $\begin{cases} |a| - 3 = 0, \\ \cos^2 y = 0 \end{cases}$ откуда

$$\begin{cases} a = \pm 3, \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \text{Теперь рассмотрим случай когда } a = 3. \text{ При этом значении}$$

параметра второе уравнение примет вид: $\left(y^2 - \pi y + \frac{\pi^2}{4}\right)z^2 + z^2 - 2z + 7 = 0$ или

$\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 z^2 + (z - 1)^2 + 6 = 0$. Последнее уравнение не имеет решений, т.к. первые два слагаемых в левой части неотрицательны и левая часть принимает значения $[6; \infty)$, т.е. не может равняться 0. Следовательно, при $a = 3$ исходная система

уравнений не имеет решений. Рассмотрим случай $a = -3$ и $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

При этом значении параметра второе уравнение примет вид: $\left(y^2 - \pi y + \frac{\pi^2}{4}\right)z^2 + z^2 - 2z + 1 = 0$ или $\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 z^2 + (z - 1)^2 = 0$. Последнее

равенство возможно только при $y = \frac{\pi}{2}$ и $z = 1$. При этом $y = \frac{\pi}{2}$ удовлетворяет

решениям $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ которое появится при $k = 0$. Таким образом,

единственным допустимым значением параметра является $a = -3$. Проверим достаточность подстановкой значения $a = -3$ в исходную систему уравнений (пункт 3). При $a = -3$ исходная система примет следующий вид

$$\begin{cases} 2^x + 2^{\frac{1}{x}} = \cos^2 y + 4, \\ \left(y^2 - \pi y + \frac{\pi^2}{4}\right)z^2 + z^2 - 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2^x + 2^{\frac{1}{x}} = \cos^2 y + 4, \\ \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 z^2 + (z - 1)^2 = 0. \end{cases} \quad \text{Решением}$$

второго уравнения последней системы является $y = \frac{\pi}{2}$ и $z = 1$. При $y = \frac{\pi}{2}$

первое уравнение последней системы примет вид $2^x + 2^{\frac{1}{x}} = 4$ решением которого является $x=1$. Осталось ответить на следующий вопрос: имеет ли последнее уравнение другие решения кроме $x=1$? Если $x < 0$, то каждое из слагаемых в левой части этого уравнения меньше 1, поэтому отрицательных корней это уравнение не имеет. Оценим левую часть этого уравнения при $x > 0$. Для этого воспользуемся тем, что среднее арифметическое двух неотрицательных выражений всегда не меньше их среднего геометрического (см. предыдущий раздел https://math100.ru/prof-ege_2022_17-6/), т.е. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (или $a+b \geq 2\sqrt{ab}$) при $a, b \geq 0$ и при этом равенство достигается, если $a=b$. Значит $2^x + 2^{\frac{1}{x}} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{\frac{1}{x}}} = 2\sqrt{2^{x+\frac{1}{x}}}$. Так как, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ при $x > 0$ (см. предыдущий раздел), то $2\sqrt{2^{x+\frac{1}{x}}} \geq 4$, откуда $2^x + 2^{\frac{1}{x}} \geq 4$. Следовательно, уравнение $2^x + 2^{\frac{1}{x}} = 4$ будет иметь решения только в том случае, когда каждое из двух неравенств, которые использовались для оценки левой части, обращаются в равенство, т.е. $x = \frac{1}{x}$ и $2^x = 2^{\frac{1}{x}}$. Единственным положительным корнем является $x=1$. Таким образом, исходная система имеет единственное решение $\left(1; \frac{\pi}{2}; 1\right)$ при $a = -3$.

Задачи этого раздела для самостоятельного решения мы решили не разбивать на несколько уровней сложности и всем им присвоили уровень В.

Уровень В

1В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - 4a \sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень.

2В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2x^2 - a \operatorname{tg}(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень.

3В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2 + a\sqrt{3} + 6 + \sin^2 ax = 6 \cos x$ имеет единственный корень.

4В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2 + a\sqrt{2} + 4 + \sin^2 ax = 4 \cos x$ имеет единственный корень.

5В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $3^x + 3^{2-x} = a^2 - 6a + 11$ имеет единственный корень.

6B. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2^x + 2^{4-x} = a^2 - 3a + 10$ имеет единственный корень.

7B. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^3 + \left(\frac{4}{x}\right)^3 + 16 = 2a^2$ имеет единственный корень.

8B. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^3 + \left(\frac{9}{x}\right)^3 + 54 = 3a^2$ имеет единственный корень.

9B (ЕГЭ 2013). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + (a-3)^2 = |x-a+3| + |x+a-3|$ имеет единственный корень.

10B (ЕГЭ 2013). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + (a-4)^2 = |x-a+4| + |x+a-4|$ имеет единственный корень.

11B (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = |x-a+5| + |x+a-5|$ имеет единственный корень.

12B (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 + (a-2)^4} = |x-a+2| + |x+a-2|$ имеет единственный корень.

13B. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$ имеет единственный корень.

14B. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2\pi^2(x-2)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 25a^3 = 0$ имеет единственный корень.

15B. Найдите все положительные значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{a + x^2 + 2\log_5(a^2 - 4a + 5)}{30\sqrt{17x^4 + 5x^2} + a + 1 + \log_5^2(a^2 - 4a + 5)}$$

состоит из одной точки.

16B. Найдите все неотрицательные значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{2a + x^2 - 4\log_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9)}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 2a + 4 + \log_{\frac{1}{3}}^2(4a^2 - 4a + 9)}$$

состоит из одной точки.

17B. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|(x-1)^2 - 2^{1-a}| + |x-1| + (1-x)^2 + 2^{a-1} = 4 + 4^a$ имеет единственный корень.

18В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\left| (x+1)^2 - 2^{-a-1} \right| + |x+1| + (1+x)^2 + 2^{a+1} = 0,25 + 4^a$ имеет единственный корень.

19В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y = (a+2)x^2 + 2ax + a - 1, \\ x = (a+2)y^2 + 2ay + a - 1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

20В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y = (a+2)x^2 - (2a+1)x + a - 3, \\ x = (a+2)y^2 - (2a+1)y + a - 3 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

21В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 12 = 2y, \\ y^2 - 2(a+1)y + a^2 - 12 = 2x \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

22В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a+1)y + a^2 - 3 = x \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

23В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a(x^4 + 1) = y - |x| + 2, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

24В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a(x^4 + 1) = y - |x| + 3, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

25В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 3|x| - 2 = 5y + 3x^2 - 5a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

26В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 2|x| - 1 = 3y + 2x^2 - 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

27В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} ax^2 + a + 2|\sin x| = y + 1, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

28В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} ax^2 + a + 3|\sin x| = y + 2, \\ \sin^2 x + y^2 = 4 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

29В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z, \\ x + y + 2z = 2a \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

30В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9z, \\ x + y = 3a + 3z \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

31В. Найдите все значения параметров a и b , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

32В. Найдите все значения параметров a и b , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 4xyz + x = a, \\ 8x^2yz + b = x, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

33В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (3 - 2\sqrt{2})^y + (3 + 2\sqrt{2})^y - 3a = x^2 + 6x + 5, \\ y^2 - (a^2 - 5a + 6)x^2 = 0, \\ -6 \leq x \leq 0 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

34В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x - 5 = a + 2y + y^2, \\ x^2 + (2 - a - a^2)y^2 = 0, \\ -2 \leq y \leq 0 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

35В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^5 + (6 - x)^5 = 2y^5, \\ (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + z^2 + a^2 = 4, \\ 12yz^2 - 2(a - 2)y^2z + 18 = 9a \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

36В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^{11} + (8 - x)^{11} = 2y^{11}, \\ (x - 4)^2 + (y - 4)^2 + z^2 + a^2 = 25, \\ 20yz^2 - (a - 5)y^2z + 40 = 8a \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

37В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2^{\frac{4}{x}} = (a^2 - 4)^2 + y^2 + 8, \\ |y|z^4 + 2z^2 - a^2z + a + 4 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

38В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3^x + 3^{\frac{1}{x}} = (a^2 - 9)^2 + y^2 + 6, \\ y^2z^4 + z^2 - 2a^2z + a + 84 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

39В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x+2)^2 + 2(a+2y) + y^2 + z^2 = 0, \\ (2 + x y z^2 (a+2) \sqrt{1-2xy}) (a \sin^2 z + x + y) = 0, \\ (xy+1) \operatorname{tg}(x+y) + \cos(x-y) = 1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

40В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy-2) \cdot \sin(y-x) + z = z \cdot \cos(x+y), \\ (x-1)^2 + y^2 + 2y + z^2 + a = 0, \\ (a \sin^2 z + y - x)((a+1) \lg(xy+1) + 1) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

41В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$2^{-x^2} \cdot 4^x + \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} = a^3 - 3a^2 + 2a + 2 + \sqrt{2}$$

имеет единственный корень.

42В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$9^{1-x} \cdot 3^{x^2} + a^3 - 5a^2 + 4a + \sqrt{2} = \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} + 3$$

имеет единственный корень.

43В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{|x-3|} + \sqrt{|y-1|} = 4, \\ x^2 - 6x + y^2 - 2y = 16a^2 - 10 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

44В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{5|x|} + \sqrt{|y+3|} = 1, \\ 25x^2 + y^2 + 6y = 16a - 9 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

45В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 \sin\left(\frac{\pi+2}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2x}{a+1} - \frac{2}{a+1}\right) - a\sqrt{4x^2 + 8 - 8x} = 3 + \arcsin|1-x|$$

имеет единственный корень.

46В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\left| \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} + 2a \right| = a^2 + 1$ имеет нечетное число корней.

47В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3} \cdot y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3} \cdot x^2 \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

48В (ЕГЭ 2021). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4 y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2 y^2) + 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

49В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x| + \left| \frac{2x-1}{3x-2} \right| = a$ имеет ровно три решения.

50В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x| + \left| \frac{x+1}{3x-1} \right| = a$ имеет ровно три решения.

ОТВЕТЫ

1В. 0; $4\sin 1$. **2В.** 0; $\operatorname{tg} 1$. **3В.** $-\sqrt{3}$. **4В.** $-\sqrt{2}$. **5В.** 1; 5. **6В.** 1; 2. **7В.** -4; 0; 4. **8В.** -6; 0; 6. **9В.** 1; 5. **10В.** 2; 6. **11В.** 3; 7. **12В.** 0; 4. **13В.** $-\frac{2}{3}$; 0. **14В.** $-\frac{2}{5}$; 0. **15В.** 4. **16В.** 0; 1. **17В.** -1. **18В.** 1. **19В.** -2; $\frac{9}{8}$. **20В.** $-\frac{7}{3}$; -2. **21В.** -4. **22В.** -2. **23В.** 4. **24В.** 6. **25В.** $\frac{2}{5}$. **26В.** $\frac{1}{3}$. **27В.** 2. **28В.** 4. **29В.** $-\frac{1}{2}$. **30В.** $\frac{1}{2}$. **31В.** $a = -2$, $b = -2$. **32В.** $a = 1$, $b = 1$. **33В.** -1; 2. **34В.** -3; -2. **35В.** 2. **36В.** 5. **37В.** -2. **38В.** -3. **39В.** -2. **40В.** -1. **41В.** 0; 1; 2. **42В.** 0; 1; 4. **43В.** $\pm\sqrt{2}$; ± 4 . **44В.** $\frac{1}{128}$; $\frac{1}{16}$. **45В.** 3. **46В.** ± 1 . **47В.** 2. **48В.** 1. **49В.** 2; $\frac{2}{3}$. **50В.** 2.