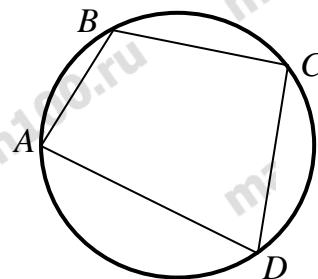


## ОКРУЖНОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОМ

В этом разделе будут рассмотрены задачи, связанные с вписанными и описанными четырехугольниками.

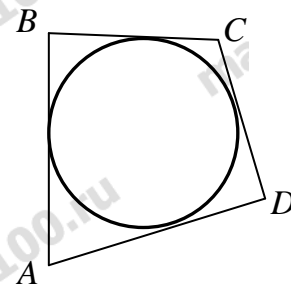
Напомним основные утверждения, относящиеся к вписанным и описанным четырехугольникам.

1) Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма противоположных углов равна  $180^\circ$ , т.е.  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$ . Верно и обратное: если сумма противоположных углов четырехугольника равна  $180^\circ$ , то около этого четырехугольника можно описать окружность.



Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда этот параллелограмм прямоугольник.

2) Если четырехугольник описан около окружности, то суммы противоположных сторон равны, т.е.  $AB + CD = BC + AD$ . Верно и обратное: если в выпуклом четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.



В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

Формула Герона для четырёхугольника, около которого можно описать окружность:  $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ , где  $a, b, c, d$  – стороны этого четырёхугольника,  $p$  – полупериметр, а  $S$  – площадь.

Если четырехугольник описан около окружности, то его площадь (как и площадь любого многоугольника, в который можно вписать окружность)  $S = pr$ , где  $p$  – полупериметр,  $r$  – радиус вписанной окружности, а  $S$  – площадь.

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 17 профильного ЕГЭ по теме «Окружности, связанные с четырехугольником». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

**Уровень А**

**1А.** Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна 1, средняя линия трапеции равна 7, а острый угол при основании равен  $45^\circ$ . Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

**2А.** Основания равнобедренной трапеции равны 9 и 21, а высота равна 8. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

**3А.** Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC = 2$  и  $AD = 10$  такова, что в неё можно вписать окружность и около неё можно описать окружность. Определите, где находится центр описанной окружности, т. е. расположен он внутри трапеции, или вне её, или же на одной из сторон трапеции  $ABCD$ . Найдите также отношение радиусов описанной и вписанной окружностей.

**4А.** Около окружности радиуса  $R$  описан параллелограмм. Площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна  $S$ . Найдите стороны параллелограмма.

**5А.** Окружность вписана в равнобедренную трапецию с основаниями  $a$  и  $b$ . Найдите высоту трапеции.

**6А.** Окружность, вписанная в трапецию, разбивает боковую сторону точкой касания на отрезки длины  $m$  и  $n$ . Найдите ее радиус.

**7А.** Прямоугольная трапеция описана около окружности. Найдите радиус этой окружности, если длины оснований трапеции равны  $a$  и  $b$ .

**8А.** Окружность проходит через вершины  $B$ ,  $C$  и  $D$  трапеции  $ABCD$  и касается стороны  $AB$  в точке  $E$ . Найдите длину диагонали  $BD$ , если длины оснований трапеции равны  $a$  и  $b$ .

**9А.** В ромбе диагонали равны 10 и 24. Найдите радиус окружности, вписанной в этот ромб.

**10А.** В ромб с острым углом  $30^\circ$  вписан круг, а в круг – квадрат. Найдите отношение площади ромба к площади квадрата.

**11А.** Вершины прямоугольника, вписанного в окружность, делят ее на четыре дуги. Найдите расстояние от середины одной из больших дуг до вершин прямоугольника, если стороны его равны 24 и 7.

**12А.** Найдите отношение площади квадрата, вписанного в сегмент с дугой  $180^\circ$ , к площади квадрата, вписанного в сегмент того же самого круга с дугой  $90^\circ$ .

**13А.** Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других сторон на отрезки, равные 2 и 23. Найдите радиус окружности.

**14А.** В трапецию, периметр которой равен 42, вписана окружность. Три стороны трапеции, взятые в последовательном порядке, относятся как  $2 : 7 : 12$ . Найдите площадь трапеции.

**15А.** Средняя линия равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 170. Найдите радиус круга, если известно, что нижнее основание больше верхнего на 160.

**16А.** Найдите диаметр окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если сумма оснований трапеции равна 15, а разность оснований равна 9.

**17А.** Трапеция  $ABCD$  вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание  $AD$  равно 15, синус угла  $BAC$  равен  $1/3$ , синус угла  $ABD$  равен  $5/9$ .

**18А.** В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен  $60^\circ$ , а площадь равна  $24\sqrt{3}$ , вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

**19А.** В равнобокой трапеции боковая сторона делится точкой касания вписанной окружности на отрезки с длинами 5 и 8. Найдите площадь круга, вписанного в трапецию.

**20А.** Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 6, большее – 12, угол при основании –  $60^\circ$ . Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

**21А.** В прямоугольной трапеции, описанной около окружности, большая боковая сторона равна 13, а средняя линия равна 12,5. Найдите ее меньшее основание.

**22А (ЕГЭ, 2006).** Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса  $\sqrt{5}$ , если тангенс угла при основании трапеции равен 0,5.

**23А.** В трапеции  $ABCD$  синус угла между боковой стороной и большим основанием  $AD$  равен  $5/6$ , а синус угла  $ADB$  равен  $\sqrt{7}/4$ . Найдите среднюю линию трапеции, если радиус окружности, описанной около трапеции, равен 8.

**24А (ОГЭ, 26 задача).** В параллелограмме  $ABCD$  проведена диагональ  $AC$ . Точка  $O$  является центром окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Расстояния от точки  $O$  до точки  $A$  и прямых  $AD$  и  $AC$  соответственно равны 5, 4 и 3. Найдите площадь параллелограмма  $ABCD$ .

**25А (ОГЭ, 26 задача).** В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $AB$  перпендикулярна основанию  $BC$ . Окружность проходит через точки  $C$  и  $D$  и касается прямой  $AB$  в точке  $E$ . Найдите расстояние от точки  $E$  до прямой  $CD$ , если  $AD = 14$ ,  $BC = 12$ .

**26А (ОГЭ, 26 задача).** Диагонали четырехугольника  $ABCD$ , вершины которого расположены на окружности, пересекаются в точке  $M$ . Известно, что  $\angle ABC = 72^\circ$ ,  $\angle BCD = 102^\circ$ ,  $\angle AMD = 110^\circ$ . Найдите  $\angle ACD$ .

**27А (ОГЭ, 26 задача).** Четырехугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 25$  и  $CD = 16$  вписан в окружность. Диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $K$ , причём  $\angle AKB = 60^\circ$ . Найдите радиус окружности, описанной около этого четырехугольника.

**28А (ОГЭ, 26 задача).** В трапеции  $ABCD$  основания  $AD$  и  $BC$  равны соответственно 49 и 21, а сумма углов при основании  $AD$  равна  $90^\circ$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $A$  и  $B$  и касающейся прямой  $CD$ , если  $AB = 20$ .

**29А.** Длины соседних сторон, вписанного в окружность, четырехугольника отличаются на 1. Длина наименьшей из них также равна 1. Найдите радиус окружности.

**30А.** В параллелограмме  $ABCD$  угол  $ACD$  равен  $30^\circ$ . Известно, что центры окружностей, описанных около треугольников  $ABD$  и  $BCD$ , расположены на диагонали  $AC$ . Найдите угол  $ABD$ .

**31А.** Дан параллелограмм  $ABCD$ ,  $AB = 2$ ,  $BC = 5$ ,  $\angle A = 60^\circ$ . Окружность с центром в точке  $O$  касается биссектрисы угла  $D$  и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найти площадь четырехугольника  $ABOD$ .

**32А.** В параллелограмме острый угол равен  $60^\circ$ , периметр равен 30, а площадь равна  $28\sqrt{3}$ . Найдите радиус окружности, касающейся двух сторон и диагонали параллелограмма.

**33А.** В ромб  $ABCD$  с острым углом  $60^\circ$  вписана окружность с центром  $O$ .  $H$  – точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Найдите сторону ромба, если  $OH = 1$ .

**34А.** В параллелограмме  $ABCD$  диагонали перпендикулярны, острый угол равен  $60^\circ$ . Найдите расстояние от центра описанной около треугольника  $ABC$  окружности до центра окружности, вписанной в параллелограмм  $ABCD$ , если  $AB = 2\sqrt{3}$ .

**35А.** Дан ромб  $ABCD$  с диагоналями  $AC = 24$  и  $BD = 10$ . Проведена окружность радиуса  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$  с центром в точке пересечения диагоналей ромба. Прямая, проходящая через вершину  $B$  касается этой окружности и пересекает прямую  $CD$  в точке  $M$ . Найдите  $CM$ .

**36А.** Окружность с диаметром, равным 10 проходит через соседние вершины  $A$  и  $B$  прямоугольника  $ABCD$ . Длина касательной, проведенной к окружности из точки  $C$ , равна 3. Найдите длину стороны  $BC$ , если известно, что  $AB = 1$ .

**37А.** Дан прямоугольник  $KLMN$  со сторонами  $KN = 11$ ,  $MN = 8$ . Прямая, проходящая через вершину  $M$ , касается окружности с центром  $K$  радиуса 4 и пересекается с прямой  $KN$  в точке  $Q$ . Найдите  $QK$ .

**38А.** На окружности радиуса 5 расположены две смежные вершины квадрата. Расстояние между центрами квадрата и окружности равно 7. Вычислите сторону квадрата.



**39А.** Сторона квадрата  $ABCD$  равна 20. Проведена окружность с центром  $D$  радиуса 4. Касательная, проведенная к этой окружности из вершины  $B$ , пересекает прямую  $CD$  в точке  $N$ . Найдите  $DN$ .

**40А.** Трапеция с основаниями 10 и 24 вписана в окружность радиуса 13. Найдите высоту трапеции.

**41А.** В окружность радиуса  $2\sqrt{5}$  вписана трапеция с основаниями 8 и  $2\sqrt{11}$ . Найдите длину диагонали трапеции.

**42А.** Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  вписана в окружность с центром  $O$ . Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна 5 и  $\sin \angle AOB = \frac{5}{13}$ .

**43А (ЕГЭ 2010).** В окружность радиуса  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$  вписана трапеция с основаниями 3 и 4. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции.

**44А.** В описанной около окружности равнобокой трапеции основания относятся как 3 : 5. Из вершины меньшего основания опущена высота на большее основание; точка  $H$  – основание высоты. Из точки  $H$  опущен перпендикуляр  $HE$  на боковую сторону трапеции. В каком отношении точка  $E$  делит боковую сторону?

**45А.** Периметр трапеции равен 112. Точка касания вписанной в трапецию окружности делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 8 и 18. Найдите основания трапеции.

**46А (ЕГЭ 2011).** Периметр равнобедренной трапеции равен 52. В трапецию вписана окружность радиуса 6. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

**47А.** В равнобедренную трапецию с периметром 20 вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону в отношении 1 : 4. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите его площадь.

**48А.** В трапеции  $ABCD$  с основаниями 10 и 30 боковые стороны  $AB$  и  $CD$  равны 20 и 24 соответственно. Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $OBC$ .

**49А.** В трапеции длины боковых сторон равны 20 и 24, а длины оснований 30 и 10. Найдите радиус окружности, касающейся меньшего основания трапеции и прямых, содержащих ее боковые стороны.

**50А.** В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  известны длины сторон:  $AB = 13$ ,  $BC = 4$ ,  $CD = 13$ ,  $AD = 14$ . Найдите радиус окружности, касающейся двух сторон этой трапеции и диагонали.

**51А.** В прямоугольной трапеции с основаниями 18 и 32 тангенс острого угла равен  $\frac{12}{7}$ . Найдите радиус окружности, которая касается одного из оснований, меньшей боковой стороны и диагонали трапеции.

**52А.** Дана трапеция  $ABCD$ , основания которой  $BC = 44$ ,  $AD = 100$ , а боковые стороны  $AB = CD = 35$ . Окружность, касающаяся прямых  $AD$  и  $AC$ , касается стороны  $CD$  в точке  $K$ . Найдите длину отрезка  $CK$ .

**53А.** Окружность  $S$  радиуса 12 вписана в прямоугольную трапецию с основаниями 28 и 21. Найдите радиус окружности, которая касается основания, большей боковой стороны и окружности  $S$ .

**54А.** Окружность  $S$  радиуса 24 вписана в равнобедренную трапецию с основаниями 36 и 64. Найдите радиус окружности, которая касается основания, боковой стороны и окружности  $S$ .

**55А.** Площадь равнобедренной трапеции, меньшее основание и высота равны 120, 9 и 8 соответственно. Прямая, параллельная ее основаниям, делит боковую сторону в отношении 5 : 3, считая от большего основания. Найдите длину отрезка, отсекаемого на этой прямой окружностью, вписанной в треугольник, образованный диагональю трапеции, ее основанием и боковой стороной.

### ОТВЕТЫ

- 1А. 5. 2А.  $\frac{85}{8}$ . 3А. вне;  $\frac{3\sqrt{14}}{5}$ . 4А.  $\frac{4R^3}{S}$ . 5А.  $\sqrt{ab}$ . 6А.  $\sqrt{mn}$ . 7А.  $\frac{ab}{a+b}$ . 8А.  $\sqrt{ab}$ . 9А.  $\frac{60}{13}$ . 10А. 4. 11А. 15 и 20. 12А. 10 : 1. 13А. 17. 14А.  $\frac{63\sqrt{6}}{2}$ . 15А. 75. 16А. 6. 17А. 12. 18А. 3. 19А.  $40\pi$ . 20А. 6. 21А. 10. 22А. 10. 23А. 10. 24А. 168. 25А.  $2\sqrt{42}$ . 26А.  $52^\circ$ . 27А.  $\sqrt{427}$ . 28А. 25. 29А.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  или  $\frac{\sqrt{21}}{3}$ . 30А.  $30^\circ$  или  $60^\circ$ . 31А.  $\frac{35\sqrt{3}}{12}$  или  $\frac{23\sqrt{3}}{6}$ . 32А.  $\sqrt{3}$  или  $\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{19}}{2}$ . 33А.  $\frac{2}{3}$  или  $2\sqrt{3}$ . 34А. 1 или  $\sqrt{3}$ . 35А.  $\frac{91}{17}$  или  $\frac{221}{7}$ . 36А.  $\frac{3(\sqrt{15} \pm \sqrt{11})}{2}$ . 37А. 5 или  $\frac{37}{3}$ . 38А. 6 или 8. 39А. 5 или  $\frac{20}{3}$ . 40А. 7 или 17. 41А.  $2\sqrt{7+2\sqrt{11}}$  или  $2\sqrt{13+2\sqrt{11}}$ . 42А. 1 или 25. 43А.  $\frac{24 \pm 3\sqrt{29}}{14}$ . 44А. 1 : 15 или 1 : 3. 45А. 14; 42 или 24; 32. 46А.  $\frac{1}{2}$  или  $\frac{162}{299}$ . 47А. 10 или  $\frac{128}{11}$ . 48А.  $\frac{25}{4}$  или  $\frac{75}{4}$ . 49А. 3 или 8. 50А. 4 или  $\frac{3}{2}$ . 51А. 6 или 8. 52А. 5 или 30. 53А. 3 или  $\frac{4}{3}$ . 54А.  $\frac{8}{3}$  или 6. 55А.  $2\sqrt{10}$  или  $2\sqrt{3}$ .

**Уровень В**

**1В.** Трапеция с основаниями 1 и 3 такова, что в неё можно вписать окружность и около неё можно описать окружность.

а) Докажите, что центр описанной около трапеции окружности расположен внутри трапеции.

б) Найдите площадь круга, описанного около трапеции.

**2В.** Трапеция, одно основание которой в 5 раз больше другого, такова, что в неё можно вписать окружность и вокруг неё можно описать окружность.

а) Докажите, что центр описанной около трапеции окружности расположен вне трапеции.

б) Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, если меньшее основание равно  $\sqrt{70}$ .

**3В.** В параллелограмме  $ABCD$  с углом  $A$ , равным  $60^\circ$ , проведена биссектриса угла  $B$ , пересекающая сторону  $CD$  в точке  $M$ .

а) Докажите, что треугольник  $BCM$  равносторонний.

б) В треугольник  $BCM$  вписана окружность радиуса  $\sqrt{7}$ . Другая окружность вписана в трапецию  $ABMD$ . Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

**4В.** Длины сторон  $AB$ ,  $AD$ ,  $BC$  и  $CD$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию.

а) Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности, если  $AB = 6$ ,  $AD = 8$ ,  $BC = 10$ ,  $CD = 12$  и  $BD = BC$ .

**5В.** Окружность, вписанная в четырёхугольник  $ABCD$ , делит стороны  $AD$  и  $CD$  точками касания в одном и том же отношении, считая от вершины  $D$ .

а) Докажите, что диагонали четырёхугольника перпендикулярны.

б) Известно, что около четырёхугольника можно описать окружность,  $AD = 56$  и  $BD = 70$ . Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник.

**6В (ЕГЭ 2018).** Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 3$ ,  $BC = CD = 5$ ,  $AD = 8$  и диагональю  $AC = 7$ .

а) Докажите, что около него можно описать окружность.

б) Найдите диагональ  $BD$ .

**7В.** Диагонали  $AC$  и  $BD$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  перпендикулярны.

а) Докажите, что  $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$ .

б) Известно, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность. Найдите её радиус, если  $BC = 8$ ,  $CD = 12$ ,  $\angle BAD = 150^\circ$ .

**8В (ЕГЭ 2015).** К окружности, вписанной в квадрат  $ABCD$ , проведена касательная, пересекающая стороны  $AB$  и  $AD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника  $AMN$  равен стороне квадрата.

б) Прямая  $MN$  пересекает прямую  $CD$  в точке  $P$ . В каком отношении делит сторону  $BC$  прямая, проходящая через точку  $P$  и центр окружности, если  $AM : MB = 1 : 3$ ?

**9В.** Дана равнобедренная трапеция  $KLMN$  с основаниями  $KN$  и  $LM$ . Окружность с центром  $O$ , построенная на боковой стороне  $KL$  как на диаметре, касается боковой стороны  $MN$  и второй раз пересекает большее основание  $KN$  в точке  $H$ , точка  $Q$  — середина  $MN$ .

а) Докажите, что четырехугольник  $NQOH$  — параллелограмм.

б) Найдите  $KN$ , если  $\angle LKN = 75^\circ$  и  $LM = 1$ .

**10В.** Сторона  $CD$  прямоугольника  $ABCD$  касается некоторой окружности в точке  $M$ . Продолжение стороны  $AD$  пересекает окружность в точках  $P$  и  $Q$ , причём точка  $P$  лежит между точками  $D$  и  $Q$ . Прямая  $BC$  касается окружности, а точка  $Q$  лежит на прямой  $BM$ .

а) Докажите, что  $\angle DMP = \angle CBM$ .

б) Известно, что  $CM = 17$  и  $CD = 32$ . Найдите сторону  $AD$ .

**11В.** Отрезок, соединяющий середины  $M$  и  $N$  оснований  $BC$  и  $AD$  соответственно трапеции  $ABCD$ , разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция  $ABCD$  равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание  $BC$  исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны  $AB$ , основания  $AN$  трапеции  $ABMN$  и вписанной в неё окружности.

**12В.** Биссектриса угла  $ADC$  параллелограмма  $ABCD$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $E$ . В треугольник  $ADE$  вписана окружность, касающаяся стороны  $AE$  в точке  $K$  и стороны  $AD$  в точке  $T$ .

а) Докажите, что прямые  $KT$  и  $DE$  параллельны.

б) Найдите угол  $BAD$ , если известно, что  $AD = 6$  и  $KT = 3$ .

**13В.** Стороны  $KN$  и  $LM$  трапеции  $KLMN$  параллельны, прямые  $LM$  и  $MN$  — касательные к окружности, описанной около треугольника  $KLN$ .

а) Докажите, что треугольники  $LMN$  и  $KLN$  подобны.

б) Найдите площадь треугольника  $KLN$ , если известно, что  $KN = 3$ , а  $\angle LMN = 120^\circ$ .

**14В (ЕГЭ 2014).** Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 50.



**15В (ЕГЭ 2015).** В прямоугольной трапеции  $ABCD$  с прямым углом при вершине  $A$  расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания  $AD$ , вторая — боковых сторон, меньшего основания  $BC$  и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание  $AD$  в точке  $P$ . Докажите, что  $\frac{AP}{PD} = \sin D$ .

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.

**16В (ЕГЭ 2015).** Диагонали  $AC$  и  $BD$  четырёхугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность, пересекаются в точке  $P$ , причём  $BC = CD$ .

а) Докажите, что  $AB : BC = AP : PD$ .

б) Найдите площадь треугольника  $COD$ , где  $O$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABD$ , если дополнительно известно, что  $BD$  — диаметр описанной около четырёхугольника  $ABCD$  окружности,  $AB = 6$ , а  $BC = 6\sqrt{2}$ .

**17В (ЕГЭ 2016).** Квадрат  $ABCD$  вписан в окружность. Хорда  $CE$  пересекает его диагональ  $BD$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что  $CK \cdot CE = AB \cdot CD$ .

б) Найдите отношение  $CK$  и  $KE$ , если  $\angle ECD = 15^\circ$ .

**18В (ЕГЭ 2017).** В трапеции  $ABCD$  угол  $BAD$  прямой. Окружность, построенная на большем основании  $AD$  как на диаметре, пересекает меньшее основание  $BC$  в точке  $S$  и  $M$ .

а) Докажите, что угол  $BAM$  равен углу  $CAD$ .

б) Диагонали трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите площадь треугольника  $AOB$ , если  $AB = 6$ , а  $BC = 4BM$ .

**19В (ЕГЭ 2017).** В трапецию  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  вписана окружность с центром  $O$ .

а) Докажите, что  $\sin \angle AOD = \sin \angle BOC$ .

б) Найдите площадь трапеции, если  $\angle BAD = 90^\circ$ , а основания равны 5 и 7.

**20В (ЕГЭ 2017).** В прямоугольную трапецию  $ABCD$  с прямым углом при вершине  $A$  и острым углом при вершине  $D$  вписана окружность с центром  $O$ . Прямая  $DO$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $M$ , а прямая  $CO$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что  $\angle AMO = \angle DKO$ .

б) Найдите площадь треугольника  $AOM$ , если  $BC = 10$  и  $AD = 15$ .

**21В (ЕГЭ 2018).** Окружность с центром  $O_1$  касается оснований  $BC$  и  $AD$  и боковой стороны  $AB$  трапеции  $ABCD$ . Окружность с центром  $O_2$  касается сторон  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$ . Известно, что  $AB = 10$ ,  $BC = 9$ ,  $CD = 30$ ,  $AD = 39$ .

а) Докажите, что прямая  $O_1O_2$  параллельна основаниям трапеции  $ABCD$ .

б) Найдите  $O_1O_2$ .

**22В (ЕГЭ 2018).** Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность радиуса  $R = 10$ . Известно, что  $AB = BC = CD = 6$ .

- а) Докажите, что прямые  $BC$  и  $AD$  параллельны.
- б) Найдите  $AD$ .

**23В (ЕГЭ 2018).** Окружность проходит через вершины  $A$ ,  $B$  и  $D$  параллелограмма  $ABCD$  и пересекает  $BC$  и  $CD$  в точках  $E$  и  $K$  соответственно.

- а) Докажите, что отрезки  $AE$  и  $AK$  равны.
- б) Найдите  $AD$ , если  $CE = 48$ ,  $DK = 20$ ,  $\cos \angle BAD = 0,4$ .

**24В (ЕГЭ 2018).** Окружность с центром в точке  $O$  высекает на всех сторонах трапеции  $ABCD$  равные хорды.

- а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной и той же точке.
- б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону  $AB$  в точках  $K$  и  $L$  так, что  $AK = 11$ ,  $KL = 10$ ,  $LB = 4$ .

**25В (ЕГЭ 2019).** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$ . Точки  $M$  и  $N$  являются серединами сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Окружность, проходящая через точки  $B$  и  $C$ , пересекает отрезки  $BM$  и  $CN$  в точках  $P$  и  $Q$  (отличных от концов отрезков).

- а) Докажите, что точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$  лежат на одной окружности.
- б) Найдите длину отрезка  $QN$ , если  $BC = 4,5$ ,  $AD = 21,5$ ,  $AB = 26$ ,  $CD = 25$ , а угол  $CPD$  — прямой.

**26В (ЕГЭ 2019).** Около треугольника  $ABC$  описана окружность. Прямая  $BO$ , где  $O$  — центр вписанной окружности, вторично пересекает описанную окружность в точке  $P$ .

- а) Докажите, что  $OP = AP$ .
- б) Найдите расстояние от точки  $P$  до прямой  $AC$ , если  $\angle ABC = 120^\circ$ , а радиус описанной окружности равен 18.

**27В (ЕГЭ 2019).** Около остроугольного треугольника  $ABC$  с различными сторонами описали окружность с диаметром  $BN$ . Высота  $BH$  пересекает эту окружность в точке  $K$ .

- а) Докажите, что  $AN = CK$ .
- б) Найдите  $KN$ , если  $\angle BAC = 35^\circ$ ,  $\angle ACB = 65^\circ$ , а радиус окружности равен 12.

**28В (ЕГЭ 2019).** Точка  $O$  — центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности. Прямая  $OB$  вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке  $P$ .

- а) Докажите, что  $\angle POC = \angle PCO$ .
- б) Найдите площадь треугольника  $APC$ , если радиус описанной около треугольника  $ABC$  окружности равен 4, а  $\angle ABC = 120^\circ$ .

**29В (ЕГЭ 2019).** В остроугольном треугольнике  $ABC$ ,  $\angle A = 60^\circ$ . Высоты  $BN$  и  $CM$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Точка  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

а) Докажите, что  $AN = AO$ .

б) Найдите площадь треугольника  $AHO$ , если  $BC = 6\sqrt{3}$ ,  $\angle ABC = 45^\circ$ .

**30В.** Окружность, вписанная в ромб  $ABCD$ , касается сторон  $CD$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $Q$  соответственно. Прямые  $AM$  и  $BC$  пересекаются в точке  $P$ .

а) Докажите, что  $BP \cdot BQ = BC^2$ .

б) Найдите угол  $\angle APC$ , если  $DM = 1$  и  $MC = 4$ .

**31В.** Дан треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 3$ ,  $AC = 5$ ,  $BC = 7$ . На его стороне  $BC$  построен вне треугольника равнобедренный треугольник  $BCD$ .

а) Докажите, что около четырёхугольника  $ABDC$  можно описать окружность.

б) Найдите расстояние от центра этой окружности до точки пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABDC$ .

**32В.** Вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  ромба  $ABCD$  лежат на окружности, а вершина  $D$  — на хорде  $AE$ . Луч  $CD$  пересекает окружность в точке  $F$ .

а) Докажите, что  $D$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $BEF$ .

б) Найдите  $AE$ , если радиус исходной окружности равен  $41\frac{2}{3}$ , а большая диагональ  $AC$  ромба равна 80.

**33В.** Окружность касается стороны  $AB$  прямоугольника  $ABCD$  в точке  $M$ , пересекает меньшую сторону  $AD$  в точках  $P$  и  $Q$  ( $P$  лежит между  $A$  и  $Q$ ), касается стороны  $CD$  и пересекает отрезок  $CM$  в точке  $N$ , причём  $MQ \perp CM$ .

а) Докажите, что  $MN = MP$ .

б) Найдите отрезок  $BN$ , если  $AP = PQ = 1$ .

**34В.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  известно, что  $AB = 7$ ,  $BC = 24$ ,  $CD = 15$ ,  $AD = 20$  и  $AC = 25$ .

а) Докажите, что четырёхугольник  $ABCD$  вписанный.

б) Найдите косинус угла между его диагоналями.

**35В.** Окружность с центром  $O$ , вписанная в трапецию  $ABCD$ , касается меньшего основания  $BC$  в точке  $N$ , а боковой стороны  $AB$  — в точке  $M$ .

а) Докажите, что  $MN \parallel OA$ .

б) Найдите площадь треугольника  $BOC$ , если известно, что  $MA = 25$ ,  $MB = 4$  и  $CD = 52$ .

**36В.** Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины прямого угла трапеции до центра второй окружности, если известно, что точка касания первой окружности делит боковую сторону трапеции на отрезки, равные 2 и 8.

**37В.** В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм — ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 4 и 1. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

**38В.** Отрезок, соединяющий середины  $M$  и  $N$  оснований соответственно  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$ , разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция  $ABCD$  равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 2, а меньшее основание  $BC$  исходной трапеции равно 6. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны  $AB$ , основания  $AN$  трапеции  $ABMN$  и вписанной в неё окружности.

**39В.** В трапецию  $ABCD$  с основаниями  $AD > BC$  можно вписать окружность. Биссектрисы углов при вершинах  $B$  и  $C$  пересекают основание  $AD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.

а) Докажите, что четырёхугольник  $ABCN$  равновелик треугольнику  $ABM$ .

б) Точка касания окружности, вписанной в трапецию  $ABCD$ , делит её основание  $BC$  в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $B$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ . В каком отношении прямая  $CN$  делит площадь трапеции?

**40В.** Дана прямоугольная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$ . Окружность с центром  $O$ , построенная на большей стороне  $CD$  как на диаметре, касается боковой стороны  $AB$  в точке  $P$  и второй раз пересекает основание  $AD$  в точке  $H$ .

а) Докажите, что  $\angle CDP = \angle HCP$ .

б) Найдите отношение  $AH : DH$ , если  $\angle ADC = 60^\circ$ .

**41В.** На стороне  $AB$  и диагонали  $AC$  квадрата  $ABCD$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно, причём  $AM : MB = 1 : 4$  и  $AN : NC = 3 : 2$ .

а) Докажите, что точки  $A$ ,  $M$ ,  $N$  и  $D$  лежат на одной окружности.

б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей четырёхугольника  $AMND$  до прямой  $MN$ , если сторона квадрата равна 30.



**42В.** Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность, причём сторона  $CD$  — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра  $AH$  к диагонали  $BD$  пересекает сторону  $CD$  в точке  $E$ , а окружность — в точке  $F$ , причём  $H$  — середина  $AE$ .

- а) Докажите, что четырёхугольник  $BCFE$  — параллелограмм.
- б) Найдите площадь четырёхугольника  $ABCD$ , если известно, что  $AB = 5$  и  $AH = 4$ .

**43В.** В параллелограмме  $ABCD$  расположены две равные непересекающиеся окружности. Первая касается сторон  $AD$ ,  $AB$  и  $BC$ , вторая — сторон  $AD$ ,  $CD$  и  $BC$ .

- а) Докажите, что общая внутренняя касательная  $l$  окружностей проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ .
- б) Пусть  $ABCD$  — прямоугольник, а прямая  $l$  касается окружностей в точках  $M$  и  $N$ . Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках  $M$ ,  $N$  и в центрах окружностей, если  $AD = 16$ , а расстояние между центрами окружностей равно 10.

**44В (ЕГЭ 2021).** Трапеция  $ABCD$  с большим основанием  $AD$  и высотой  $BH$  вписана в окружность. Прямая  $BH$  вторично пересекает эту окружность в точке  $K$ .

- а) Докажите, что прямые  $AC$  и  $AK$  перпендикулярны.
- б) Прямые  $CK$  и  $AD$  пересекаются в точке  $N$ . Найдите  $AD$ , если радиус окружности равен 12,  $\angle BAC = 30^\circ$ , а площадь четырёхугольника  $BCNH$  в 8 раз больше площади треугольника  $KNH$ .

**45В (ЕГЭ 2022).** В треугольнике  $ABC$  точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно. Известно, что около четырёхугольника  $AMNC$  можно описать окружность.

- а) Докажите, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный.
- б) На стороне  $AC$  отмечена точка  $F$ , такая что  $\angle AFB = 135^\circ$ . Отрезок  $BF$  пересекает отрезок  $MN$  в точке  $E$ . Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника  $AMNC$ , если  $\angle ABC = 120^\circ$  и  $EF = 6\sqrt{2}$ .

**46В (ЕГЭ 2023).** Дан треугольник  $ABC$ . Известно, что  $BC = \sqrt{37}$ ,  $AB = 4$ ,  $AC = 3$ . На стороне  $BC$  построен равносторонний треугольник  $BDC$ , при этом точки  $A$  и  $D$  лежат по разные стороны от прямой  $BC$ .

- а) Докажите, что вокруг полученного четырёхугольника  $ABDC$  можно описать окружность.
- б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABDC$  до центра его описанной окружности.

**ОТВЕТЫ**

1B.  $\frac{7\pi}{3}$ . 2B. 21. 3B. 7. 4B. 4. 5B. 24. 6B.  $\frac{55}{7}$ . 7B. 2,4. 8B. 1 : 3. 9B. 3. 10B.  $\frac{85}{3}$ .  
11B.  $\frac{11-2\sqrt{10}}{3}$ . 12B.  $60^\circ$ . 13B.  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ . 14B.  $2\sqrt{986}$ . 15B.  $30+16\sqrt{3}$ . 16B.  $18\sqrt{3}$ .  
17B. 2 : 1. 18B. 20. 19B. 35. 20B. 30. 21B. 4. 22B. 15,84. 23B. 50. 24B. 24. 25B.  
 $\frac{182}{25}$ . 26B. 27. 27B. 12. 28B.  $12\sqrt{3}$ . 29B. 9. 30B.  $\arctg \frac{1}{7}$ . 31B.  $\frac{7\sqrt{57}}{24}$ . 32B. 78.  
33B. 3. 34B. 0,6. 35B. 30. 36B.  $2\sqrt{53}$ . 37B. 6,4. 38B.  $3-\sqrt{5}$ . 39B. 5 : 4. 40B.  
1 : 2. 41B.  $\sqrt{13}$ . 42B. 67,5. 43B. 24. 44B.  $4\sqrt{33}$ . 45B.  $12\sqrt{7}$ . 46B.  $\frac{\sqrt{1443}}{21}$ .