

УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРАМИ

В этом разделе представлены уравнения, неравенства и системы с параметрами которые не предлагались в предыдущих разделах.

Уровень В

1В (ЕГЭ 2017, 2023). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x-2} \ln(x-a) = \sqrt{3x-2} \ln(2x+a)$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

2В (ЕГЭ 2017, 2023). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3-5x} \ln(4x^2 - a^2) = \sqrt{3-5x} \ln(2x+a)$ имеет ровно один корень.

3В (ЕГЭ 2017, 2023). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\ln(4x-1) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 6a - a^2} = 0$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;3]$.

4В (ЕГЭ 2017). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\operatorname{tg}(\pi x) \cdot \ln(x+a) = \ln(x+a)$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

5В (ЕГЭ 2017, 2023). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-a} \cdot \sin x = \sqrt{x-a} \cdot \cos x$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;\pi]$.

6В (ЕГЭ 2017, 2023). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x\sqrt{x-a} = \sqrt{6x^2 - (6a+3)x + 3a}$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

7В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{a \sin x + \cos x} = \sqrt{a \cos x + \sin x}$ имеет решения на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

8В (ЕГЭ 2019). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2\sin x + \cos x = a$ имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

9В. Найдите все значения x , каждое из которых является решением уравнения $\frac{(a-1)\sqrt{3} \sin 2x + (1+\sqrt{3}-a)\cos 2x}{6\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x} = 1$ при любом значении a из отрезка $[0;7\sqrt{3}]$.

10В. Найдите все значения x , каждое из которых является решением уравнения
$$\frac{a\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + (\sqrt{3} - a)\cos\frac{x}{2}}{6\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2}} = 1$$
 при любом значении a из отрезка $[-2; 5\sqrt{2}]$.

11В (ЕГЭ 2018, 2023). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = a^2 - 14a$ имеет хотя бы одно решение.

12В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|\cos x + 3\sin x + a| = a - 3\cos x - \sin x$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

13В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(1 + \sin x)^4 - 4\sin x = 7 - a - a^2$ не имеет решений.

14В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^3 + 2x^2 - x\log_2(a - 1) + 4 = 0$ имеет единственное решение на отрезке $[-1; 2]$.

15В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} (a - 1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a + 1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

16В (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x^2 - 2ax + 7| = |6a - x^2 - 2x - 1|$ имеет более двух корней.

17В (ЕГЭ 2013). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|\cos^2 x + 2\sin x - 2a| = \cos^2 x + \sin x + 2a$ имеет единственный корень на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

18В (ЕГЭ 2013). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|\cos^2 x + 2\sin x - 4a| = \cos^2 x + \sin x + 4a$ имеет единственный корень на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

19В (ЕГЭ 2016). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 - 16x^2 + 64a^2} = x^2 + 4x - 8a$ имеет ровно три различных решения.

20В (ЕГЭ 2016). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$ имеет ровно три различных решения.

21В (ЕГЭ 2016). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2^x - a = \sqrt{4^x - a}$ имеет единственный корень.

22В (ЕГЭ 2016). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{x-2a}{x+2} + \frac{x-1}{x-a} = 1$ имеет единственный корень.

23В (ЕГЭ 2016). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{2a-x} = a$ имеет ровно два различных корня.

24В (ЕГЭ 2018). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+2a-1} + \sqrt{x-a} = 1$ имеет хотя бы один корень.

25В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(2x+a+1+\operatorname{tg} x)^2 = (2x+a-1-\operatorname{tg} x)^2$ имеет единственный корень на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

26В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(2x+\ln(x+2a))^2 = (2x-\ln(x+2a))^2$ имеет единственный корень на отрезке $[0;1]$.

27В (ЕГЭ 2017). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + (x-1)\sqrt{2x-a} = x$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

28В (ЕГЭ 2017, 2023). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{3x^2-(3a+1)x+a}$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

29В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\log_a \frac{3+2x^4}{1+x^4} + \log_a \frac{5+4x^4}{1+x^4} > 1$ выполняется для всех действительных x .

30В (ЕГЭ 2012). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $|x^2-8x+a+5| > 10$ не имеет решений на отрезке $[a-6; a]$.

31В (ЕГЭ 2018). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (4a-6)x + 4ay + 1 = 0, \\ x^2 + y = xy + x \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

32В (ЕГЭ 2018). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y = |5a-12| \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

33В (ЕГЭ 2018). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

34В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} (x+ay-4)(x+ay-4a) = 0, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

35В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни уравнения $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = a$ существуют и принадлежат отрезку $[2;17]$.

36В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2x^4 + 9ax + 7a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.

37В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2\cos^2 2^{2x-x^2} = a + \sqrt{3}\sin 2^{2x-x^2+1}$ имеет хотя бы один корень.

38В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых сумма арктангенсов корней уравнения $x^2 + (1-2a)x + a - 4 = 0$ больше $\frac{\pi}{4}$.

39В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^3 + ax^2 + 13x - 6 = 0$ имеет единственное решение.

40В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение
$$\frac{(x^3-1)(x^2-16)}{\lg(15a-x) - \lg(x-a)} = 0$$
 имеет единственный корень.

41В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(2y-x)a = 1 + 2a - 4a^2, \\ x^2 + y^2 + 4(x-y)a = 4 + 4a - 7a^2 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

42В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2(2y-x)a = 1 - 2a - 4a^2, \\ x^2 + y^2 - 4(x-y)a = 4 - 4a - 7a^2 \end{cases}$$
 не имеет решений.

43В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} (x-a-2)^2 + (y-a-4)^2 = (2a-1)^2, \\ (x-2a+1)^2 + (y-2a-3)^2 = (a-1)^2 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

44В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} (x-a-1)^2 + (y-a-3)^2 = (2a-3)^2, \\ (x-2a+3)^2 + (y-2a-1)^2 = (a-2)^2 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

45В (ЕГЭ 2021). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot \sqrt{x^2 - 7ax + 8a}$ имеет ровно два различных корня.

46В (ЕГЭ 2023). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{|4x| - x - 3 - a}{x^2 - x - a} = 0$ имеет два различных решения.

47В (ЕГЭ 2023). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^2 + 6x + 8} = \sqrt{x + a}$ имеет ровно один отрицательный корень.

ОТВЕТЫ

- 1В.** $\left(-\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$. **2В.** $\left(-\frac{6}{5}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{5}; \frac{6}{5}\right]$. **3В.** $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{11}{2}; \frac{23}{4}\right]$. **4В.** $\left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup \left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right\} \cup (1; \infty)$. **5В.** $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$. **6В.** $(-\infty; 0) \cup [3 - \sqrt{6}; 1]$. **7В.** $(-\infty; -1] \cup \{1\}$. **8В.** $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \{\sqrt{5}\}$. **9В.** $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **10В.** $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **11В.** $[0; 6] \cup [8; 14]$. **12В.** $(-1; 1]$. **13В.** $(-\infty; -3) \cup (2; \infty)$. **14В.** $\left(1; \frac{33}{32}\right] \cup \{129\} \cup (1025; \infty)$. **15В.** $-\frac{3}{4}; \frac{4}{3}$. **16В.** $(-\infty; -5 - 2\sqrt{10}) \cup \{-1\} \cup \left(-5 + 2\sqrt{10}; \frac{8}{3}\right) \cup \left(\frac{8}{3}; \infty\right)$. **17В.** $\left\{-\frac{1}{8}\right\} \cup [0; \infty)$. **18В.** $\left\{-\frac{1}{16}\right\} \cup [0; \infty)$. **19В.** $(-\infty; -2) \cup (-2; 0)$. **20В.** $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$. **21В.** $(-1; 0) \cup (0; 1]$. **22В.** $\frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}; \pm 1; -2$. **23В.** $[2; 4)$. **24В.** $\left[0; \frac{2}{3}\right]$. **25В.** $(-\infty; -\pi] \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cup [\pi; \infty)$. **26В.** $\{0\} \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$. **27В.** $(-\infty; 0) \cup (0; 2]$. **28В.** $\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \{1\}$. **29В.** $(1; 8]$. **30В.** $\left[\frac{19 - \sqrt{45}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2}\right]$. **31В.** $\left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup \left(-\frac{7}{2}; 0\right) \cup \left(1; \frac{9}{2}\right)$. **32В.** $\left(\frac{60 - 12\sqrt{2}}{23}; 2\right) \cup \left(3; \frac{60 + 12\sqrt{2}}{23}\right)$. **33В.**

$\left(-\frac{17}{4}; -2\right) \cup (-2; 2) \cup \left(2; \frac{17}{4}\right).$ **34B.** $\left(-\frac{3\sqrt{7}}{7}; -\frac{\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{7}}{3}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3\sqrt{7}}{7}\right).$ **35B.**

$[1; 3].$ **36B.** $0; \pm 1; \pm \frac{2}{7}.$ **37B.** $[-1; 2).$ **38B.** $(2; \infty).$ **39B.** $(-\infty; -8) \cup \left(-\frac{20}{3}; \frac{61}{8}\right).$ **40B.**

$\left(\frac{1}{15}; \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}; \frac{4}{15}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1; 4).$ **41B.** $-\frac{3}{7}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; 1.$ **42B.**

$(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{7}; \infty\right).$ **43B.** $\frac{2 \pm \sqrt{46}}{7}; 4 \pm \sqrt{6}.$ **44B.** $\frac{9 \pm \sqrt{46}}{7}; 5 \pm \sqrt{6}.$ **45B.**

$(-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup (0; \infty).$ **46B.** $(-3; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6) \cup (6; 12) \cup (12; \infty).$ **47B.**

$[2; 4) \cup [8; \infty).$