

## ТРЕУГОЛЬНИК И ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ

### Теоремы о медианах треугольника

1) Медианы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка называется центром тяжести треугольника) и делятся этой точкой в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины треугольника,  $AM = 2MA_1$ ,  $BM = 2MB_1$ ,  $CM = 2MC_1$ .

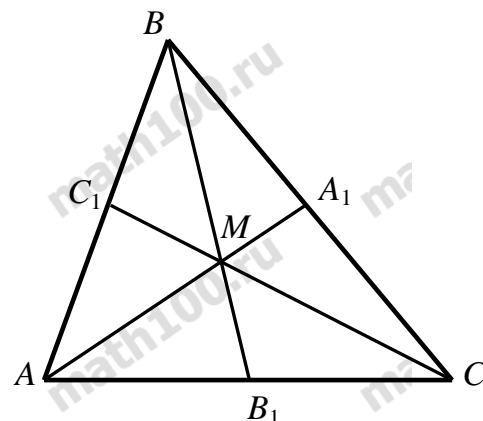
2) Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника (на треугольники с равными площадями), например,  $S_{\triangle ABB_1} = S_{\triangle CBB_1}$ .

3) Все медианы треугольника делят его на 6 равновеликих треугольников, т.е.

$$S_{\triangle AMB_1} = S_{\triangle AMC_1} = S_{\triangle BMC_1} = S_{\triangle BMA_1} = S_{\triangle CMA_1} = S_{\triangle CMB_1}.$$

4) Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

5) Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.



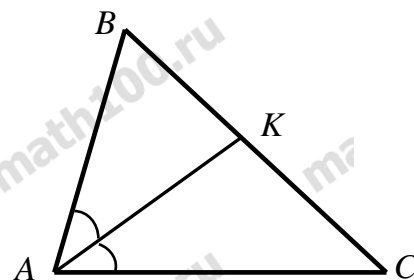
**Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника:** серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

**Теорема о высотах треугольника:** прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

**Теорема о биссектрисах треугольника:** биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

**Свойство биссектрисы треугольника:** биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим

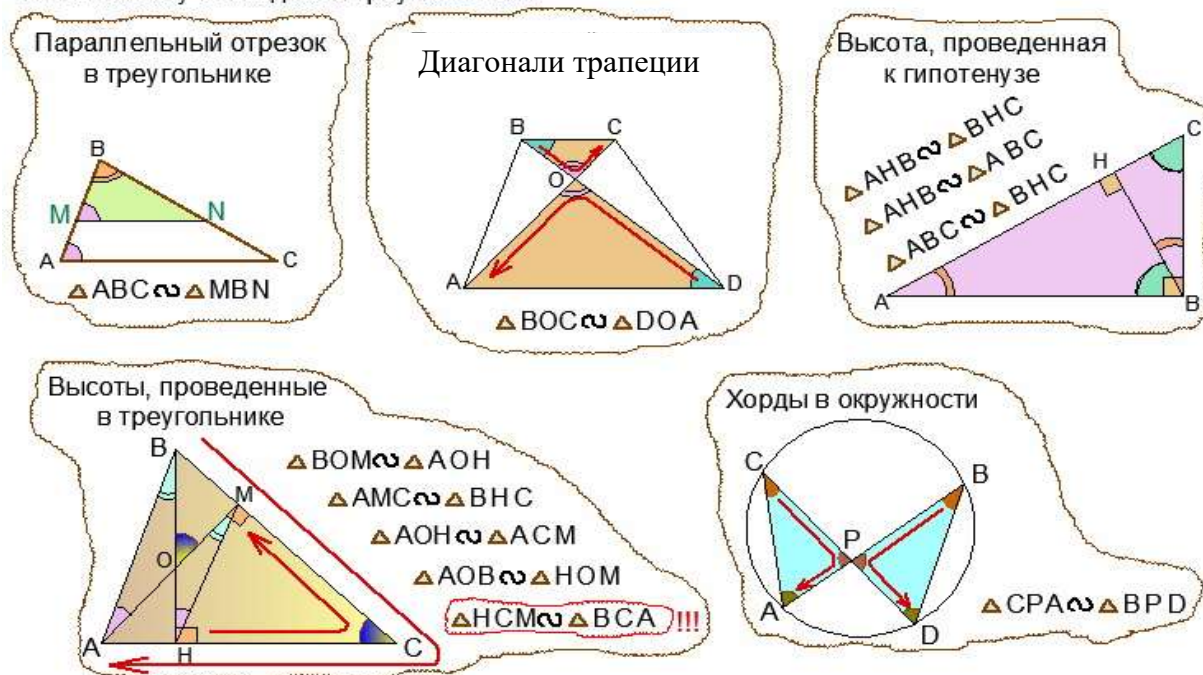
сторонам, т.е.  $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC}$ .



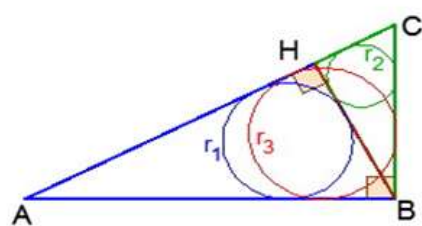
**Длина биссектрисы треугольника:**  $AK = \sqrt{AB \cdot AC - BK \cdot CK}$ .

**Формула для медианы треугольника:** если  $m_c$  — медиана треугольника, проведенная к стороне  $c$ , то  $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ , где  $a$  и  $b$  — остальные стороны треугольника.

## Типичные случаи подобия треугольников

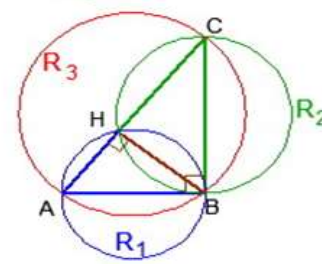


## Подобие в прямоугольном треугольнике:



$$r_1^2 + r_2^2 = r_3^2$$

Интересные следствия  
подобия в прямоугольном  
треугольнике

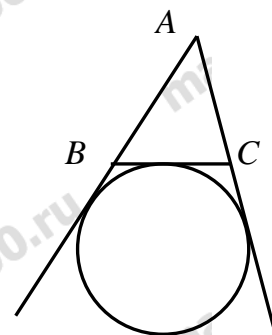


$$R_1^2 + R_2^2 = R_3^2$$

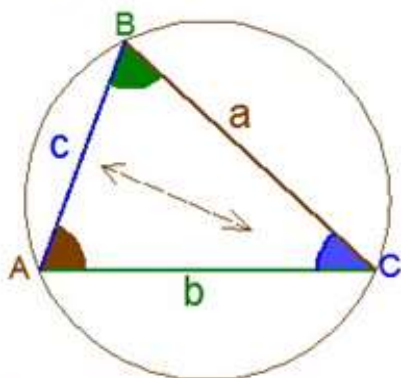
**Площади подобных треугольников:** отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Отношение сторон подобных треугольников равно отношению любых соответствующих линейных размеров.

Центр окружности описанной вокруг прямоугольного треугольника находится на середине гипотенузы:  $R = \frac{c}{2}$ ;  $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$ , где  $a, b$  – катеты, а  $c$  – гипотенуза прямоугольного треугольника;  $r$  и  $R$  – радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно;  $p$  – полупериметр треугольника.

**Вневписанная окружность.** Окружность называют окружностью, вневписанной в треугольник, или вневписанной окружностью, если она касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. У каждого треугольника существуют три вневписанных окружности. Центр вневписанной окружности, изображенной на рисунке, лежит в точке пересечения биссектрисы внутреннего угла  $A$  и двух биссектрис внешних углов  $B$  и  $C$ , а окружность касается стороны  $BC$ . Радиус вневписанной окружности, касающейся стороны  $BC$ , вычисляется по формуле  $r = \frac{S}{p - BC}$ , где  $S$  – площадь треугольника  $ABC$ , а  $p$  – его полупериметр.



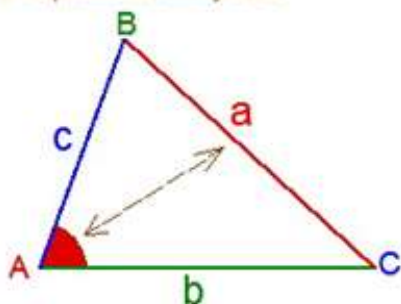
Теорема синусов:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R !!!$$

R - радиус описанной окружности

Теорема косинусов:



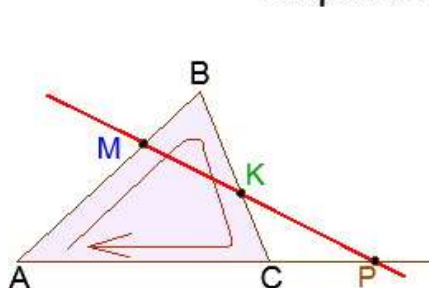
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Как найти косинус угла в треугольнике:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

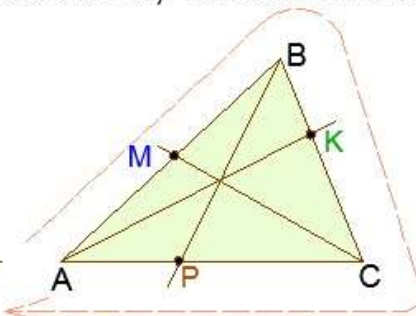
Если  $\cos A < 0 \Rightarrow \angle A$  - тупой

Теорема Менелая, Чевы и Птолемея:



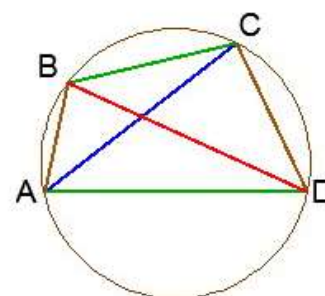
$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

теорема Менелая



$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

теорема Чевы



$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

теорема Птолемея



Во многих случаях для решения задачи удобно применить следующее дополнительное построение, которое называют **удвоением медианы**.

На продолжении медианы  $AM$  треугольника  $ABC$  за точку  $M$  отложим отрезок  $MD$ , равный  $AM$ . Тогда диагонали  $AD$  и  $BC$  четырёхугольника  $ABDC$  точкой пересечения  $M$  делятся пополам, значит,  $ABDC$  — параллелограмм. Далее применяем свойства параллелограмма.

**Следствие из теоремы косинусов:** сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, т.е.  $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ , где  $d_1$  и  $d_2$  диагонали параллелограмма, а  $a$  и  $b$  стороны параллелограмма.

Высоту прямоугольного треугольника, проведённую из вершины прямого угла, удобно находить так: вычислить двумя способами площадь треугольника — как половину произведения катетов и как половину произведения гипотенузы на искомую высоту — и затем из полученного равенства выразить эту высоту. Таким образом, **высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна произведению катетов, делённому на гипотенузу**.

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 17 профильного ЕГЭ по теме «Треугольник и его элементы». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

### Уровень А

**1А.** Найдите стороны треугольника, периметр которого равен 96, а стороны пропорциональны числам 3, 4, 5.

**2А.** Периметр треугольника  $ABC$  равен 75. Найдите стороны треугольника, если сторона  $AC$  вдвое больше стороны  $AB$ , а сторона  $BC$  на 10 меньше стороны  $AC$ .

**3А.** Периметр равнобедренного треугольника равен 32. Основание относится к боковой стороне как 6 : 5. Определите стороны треугольника.

**4А.** В треугольнике  $ABC$  известно:  $AC = 3\sqrt{2}$ ,  $BC = 5$ ,  $\angle A = 45^\circ$ . Найдите  $AB$ .

**5А.** В треугольнике даны стороны  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = 2\sqrt{3}$ . Угол  $A$ , противолежащий стороне  $a$ , равен  $30^\circ$ . Найдите третью сторону.

**6А.** Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 1. Найдите длину гипотенузы.

**7А.** Определите острые углы прямоугольного треугольника, длины сторон которого образуют геометрическую прогрессию.

**8А.** В треугольнике  $ABC$  найдите отношение  $BC : AC$ , если известно, что  $\angle A = 120^\circ$  и  $AB : AC = 2$ .

**9А.** Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся как  $2 : 1$ . В каком отношении, считая от вершины, она делит боковые стороны?

**10А.** Определите, чему равна длина стороны треугольника, лежащей против тупого угла, если длины двух других сторон равны 7 и 8, а площадь треугольника равна  $14\sqrt{3}$ .

**11А.** В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AC$  взята точка  $B_1$  так, что  $AB_1 : B_1C = 2 : 3$ . Найдите площадь треугольника  $BB_1C$ , если  $S_{ABC} = 30$ .

**12А.** В прямоугольном треугольнике длины медиан острых углов равны  $\sqrt{52}$  и  $\sqrt{73}$ . Найдите длину гипотенузы.

**13А.** Найдите расстояние от точки пересечения медиан прямоугольного треугольника до его катета, равного 12, если гипотенуза равна 15.

**14А.** В остроугольном треугольнике  $ABC$   $\angle A = 60^\circ$ ,  $BC = 10$ , отрезки  $BM$  и  $CK$  – высоты. Найдите отрезок  $KM$ .

**15А.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC = 4$  проведена высота  $CK$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если известно, что  $BK : BA = 4 : 5$ .

**16А.** В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и к боковой стороне, равны соответственно 10 и 12. Найдите площадь треугольника.

**17А.** Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки 2,8 и 4,2. Периметр треугольника равен 22. Найдите стороны треугольника.

**18А.** Дан треугольник  $ABC$  такой, что  $AB = 15$ ,  $BC = 12$  и  $AC = 18$ . В каком отношении центр вписанной в треугольник окружности делит биссектрису угла  $C$ ?

**19А.** Вычислите длину биссектрисы угла  $A$  треугольника  $ABC$  с длинами сторон  $BC = 18$ ,  $AC = 15$ ,  $AB = 12$ .

**20А.** В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите длину биссектрисы, проведенную к боковой стороне.

**21А.** Катеты прямоугольного треугольника равны 21 и 28. Найдите длину биссектрисы прямого угла.

**22А.** Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4. Найдите радиус описанной окружности.

**23А.** Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна  $m$  и делит прямой угол в отношении  $1 : 2$ . Найдите стороны треугольника.

**24А.** Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 8 и 9. Найдите стороны треугольника.

**25А.** В треугольнике  $ABC$  к стороне  $AC$  проведены высота  $BK$  и медиана  $BM$ , причём  $AM = BM$ . Найдите косинус угла  $KBM$ , если  $AB = 1$ ,  $BC = 2$ .

**26А.** Вне прямоугольного треугольника  $ABC$  на его катетах  $AC$  и  $BC$  построены квадраты  $ACDE$  и  $BCFG$ . Продолжение медианы  $CM$  треугольника  $ABC$  пересекает прямую  $DF$  в точке  $N$ . Найдите отрезок  $CN$ , если катеты равны 1 и 4.

**27А.**  $BD$  – медиана прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ). Пусть  $K$  – точка касания стороны  $AD$  треугольника  $ABD$  с окружностью, вписанной в этот треугольник. Найти углы треугольника  $ABC$ , если  $K$  делит  $AD$  пополам.

**28А.** Гипотенуза прямоугольного треугольника в 4 раза больше проведенной к ней высоты. Найдите острые углы треугольника.

**29А.** В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB$  и  $AC$  равны соответственно 8 и 7,  $\angle BAC = 120^\circ$ . Найти расстояние от основания высоты, опущенной на  $AC$ , до середины  $BC$ .

**30А.** Медиана  $AM$  треугольника  $ABC$  равна  $m$  и образует со сторонами  $AB$  и  $AC$  углы  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Найдите эти стороны.

**31А.** В треугольнике  $ABC$  известно, что  $BD$  — медиана,  $BD = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ , а  $\angle DBC = 90^\circ$ . Найдите угол  $ABD$ .

**32А.** Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 27 и 29, а медиана, проведённая к третьей, равна 26.

**33А.** Стороны треугольника равны 11, 13 и 12. Найдите медиану, проведённую к большей стороне.

**34А.** В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведённая к третьей, равна 10. Найдите третью сторону.

**35А.** В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, проведена медиана к боковой стороне. Найдите основание треугольника, если медиана равна 3.

**36А.** В треугольнике  $ABC$  известны стороны  $AB = 2$  и  $AC = 4$  и медиана  $AM = \sqrt{7}$ . Найдите угол  $BAC$ .

**37А.** Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 12 и 20 соответственно. Найдите высоту, проведённую из вершины прямого угла.

**38А.** Найдите высоту прямоугольного треугольника, опущенную на гипотенузу, если известно, что основание этой высоты делит гипотенузу на отрезки, равные 1 и 4.

**39А.** Высота равнобедренного треугольника, опущенная на боковую сторону, разбивает её на отрезки, равные 2 и 1, считая от вершины треугольника. Найдите эту высоту.

**40А.** Стороны треугольника равны 10, 17 и 21. Найдите высоту треугольника, проведённую из вершины наибольшего угла.

**41А.** В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = 8$ ,  $AC = 6$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ . Найдите биссектрису  $AM$ .

**42А.** Найдите высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания равны 4 и 14.

**43А.** Площадь прямоугольного треугольника равна  $2\sqrt{3}$ . Найдите его высоту, проведённую к гипотенузе, если она делит прямой угол в отношении  $1 : 2$ .

**44А.** Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами  $m$  и  $n$ . Найдите стороны треугольника.

**45А.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) проведены высота  $CD$  и медиана  $CE$ . Площади треугольников  $ABC$  и  $CDE$  равны соответственно 10 и 3. Найдите  $AB$ .

**46А.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  катеты  $AB$  и  $AC$  равны 4 и 3 соответственно. Точка  $D$  делит гипотенузу  $BC$  пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники  $ADC$  и  $ABD$ .

**47А.** Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен  $30^\circ$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведённой из вершины прямого угла.

**48А.** Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

**49А.** Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны  $40^\circ$  и  $50^\circ$ . Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.

**50А.** Диагонали трапеции перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найдите площадь трапеции.

**51А.** Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведённая к третьей, равна 5. Найдите площадь треугольника.

**52А.** Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 3, 4 и 5.

**53А.** Медиана  $AD$  и высота  $CE$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) пересекаются в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $CP = 5$ ,  $PE = 2$ .



**54А.** Медиана  $AM$  и биссектриса  $CD$  прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) пересекаются в точке  $O$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $CO = 9$ ,  $OD = 5$ .

**55А.** Расстояния от точки  $M$ , лежащей внутри треугольника  $ABC$ , до его сторон  $AC$  и  $BC$  соответственно равны 2 и 4. Найдите расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB$ , если  $AB = 10$ ,  $BC = 17$ ,  $AC = 21$ .

**56А.** К окружности радиуса 7 проведены две касательные из одной точки, удалённой от центра на расстояние, равное 25. Найдите расстояние между точками касания.

**57А.** В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AC$  как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону  $AB$  в точке  $M$ , а сторону  $BC$  — в точке  $N$ . Известно, что  $AC = 2$ ,  $AB = 3$ ,  $AM : MB = 2 : 3$ . Найдите  $AN$ .

**58А.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $60^\circ$ , а биссектриса  $CD$  равна  $5\sqrt{3}$ . Стороны  $AC$  и  $BC$  относятся как 5 : 2. Найдите тангенс угла  $A$  и сторону  $BC$ .

**59А.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $CD$  из вершины прямого угла  $C$ . Известно, что  $AD = m$ ,  $BD = n$ . Найдите высоту, опущенную из вершины  $C$ .

**60А.** Прямая, параллельная основанию треугольника с площадью 108, отсекает от него треугольник с площадью 12. Найдите площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами малого треугольника, а четвертая лежит на основании большего треугольника.

**61А.** В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB = 14$ ,  $AC = 18$ , угол  $A$  вдвое больше угла  $B$ . Найдите третью сторону треугольника.

**62А. (ЕГЭ 2003).** В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $AM$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AC = 3\sqrt{2}$ ,  $BC = 10$ ,  $\angle MAC = 45^\circ$ .

**63А. (ЕГЭ 2003).** В треугольнике  $BCE$  медиана  $BM$  равна 3,  $CE = 4\sqrt{2}$ ,  $BE = 5$ . Найдите сторону  $BC$ .

**64А.** Прямоугольный треугольник, периметр которого равен 10, разбит высотой, опущенной на гипотенузу, на два треугольника. Периметр одного из них равен 6. Найдите периметр другого треугольника.

**65А.** Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника с площадями 64 и 16. Найдите катеты.

**66А. (ЕГЭ 2005).** Площадь равнобедренного треугольника  $ABC$  равна 10, а боковая сторона равна 5. К основанию  $AC$  и стороне  $BC$  проведены высоты  $BM$  и  $AN$ , пересекающиеся в точке  $K$ . Найдите площадь треугольника  $ABK$ .

**67А. (ЕГЭ 2005).** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  высоты  $BD$  и  $AN$  пересекаются в точке  $T$ , причем  $AT = 10$ ,  $TH = 8$ . Найдите площадь треугольника  $ABT$ .



**68А.** Высоты  $AH$  и  $BK$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$  пересекаются в точке  $O$  так, что  $BO = 5$ ,  $OK = 3$ . Найдите  $AH$ .

**69А.** Найдите площадь прямоугольного треугольника, если известно, что биссектриса прямого угла разделила гипотенузу на отрезки 30 и 40.

**70А.** Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 12. Найдите расстояние между точкой пересечения его биссектрис и точкой пересечения медиан.

**71А. (ЕГЭ 2005).** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  проведена биссектриса  $BK$ . Найдите площадь треугольника  $CBK$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна 18, а синус угла  $A$  равен 0,8.

**72А.** В треугольнике  $ABC$  известны  $BC = 15$ ,  $AC = 14$ ,  $AB = 13$ . Вычислите площадь треугольника, заключенного между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины  $B$ .

## ОТВЕТЫ

- 1А. 24; 32; 40. 2А. 17; 34; 24. 3А. 10; 10; 12. 4А. 7. 5А. 3. 6А. 5. 7А.  $\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ;  $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . 8А.  $\sqrt{7}$ . 9А.  $(\sqrt{6}+2):1$ ;  $(\sqrt{3}+1):2$ . 10А. 13. 11А. 18. 12А. 10. 13А. 3. 14А. 5. 15А. 12. 16А. 75. 17А. 6; 7; 9. 18А. 2 : 1. 19А. 10. 20А. 6. 21А.  $12\sqrt{2}$ . 22А. 2. 23А.  $2m, m, m\sqrt{3}$ . 24А. 3; 4; 5. 25А. 0,8. 26А.  $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ . 27А.  $30^\circ$ ;  $60^\circ$ . 28А.  $15^\circ$ ;  $75^\circ$ . 29А. 6,5. 30А.  $\frac{2m \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ ;  $\frac{2m \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ . 31А.  $30^\circ$ . 32А. 270. 33А. 9,5. 34А. 30. 35А.  $\sqrt{10}$ . 36А.  $60^\circ$ . 37А. 9,6. 38А. 2. 39А.  $\sqrt{5}$ . 40А. 8. 41А.  $\frac{24\sqrt{3}}{7}$ . 42А. 4,8. 43А.  $\sqrt{3}$ . 44А.  $\sqrt{2mn} - m$ ,  $\sqrt{2mn} - n$ ,  $n + m - \sqrt{2mn}$ . 45А.  $5\sqrt{2}$ . 46А.  $\frac{5\sqrt{13}}{12}$ . 47А.  $2\sqrt{\frac{22-12\sqrt{3}}{3}}$ . 48А. 8; 2; 3. 49А. 5; 3. 50А.  $9\sqrt{5}$ . 51А. 48. 52А. 8. 53А.  $\frac{245}{8}$ . 54А.  $\frac{1323}{20}$ . 55А.  $\frac{29}{5}$ . 56А. 13,44. 57А.  $\frac{24\sqrt{145}}{145}$ . 58А.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ; 7. 59А.  $\frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}$ . 60А. 36. 61А. 24. 62А. 21. 63А. 3. 64А. 8. 65А.  $4\sqrt{5}$ ;  $8\sqrt{5}$ . 66А. 3,75. 67А. 120. 68А.  $4\sqrt{5}$ . 69А. 1176. 70А. 1. 71А. 8. 72А. 9.

**Уровень В**

**1В.** Биссектриса  $CD$  угла  $ACB$  при основании равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = AC$ ) делит сторону  $AB$  так, что  $AD = BC = 2$ .

а) Докажите, что  $CD = BC$ .

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

**Решение**

**2В.** Площадь треугольника  $ABC$  равна 12. На прямой  $AC$  взята точка  $D$  так, что точка  $C$  является серединой отрезка  $AD$ . Точка  $K$  — середина стороны  $AB$ , прямая  $KD$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $L$ .

а) Докажите, что  $BL : LC = 2 : 1$ .

б) Найдите площадь треугольника  $BLK$ .

**Решение**

**3В.** Точка  $D$  делит сторону  $AC$  треугольника  $ABC$  в отношении  $AD : DC = 1 : 2$ .

а) Докажите, что в треугольнике  $ABD$  найдётся медиана, равная одной из медиан треугольника  $DBC$ .

б) Найдите длину этой медианы в случае, если  $AB = 7$ ,  $BC = 8$  и  $AC = 9$ .

**Решение**

**4В (ЕГЭ 2014).** В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AM$ . Прямая, проходящая через вершину  $B$  перпендикулярно  $AM$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $N$ .  $AB = 6$ ,  $BC = 5$ ,  $AC = 9$ .

а) Докажите, что биссектриса угла  $C$  делит отрезок  $MN$  пополам.

б) Пусть  $P$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ . Найдите отношение  $AP : PN$ .

**Решение**

**5В.** Медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  — середины отрезков  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$  соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника  $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$  вдвое меньше площади треугольника  $ABC$ .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что  $AB = 5$ ,  $BC = 8$  и  $AC = 10$ .

**Решение**

**6В.** Медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Известно, что  $AC = 3MB$ .

- а) Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
- б) Найдите сумму квадратов медиан  $AA_1$  и  $CC_1$ , если известно, что  $AC = 12$ .

**Решение**

**7В.** Точка  $M$  — середина гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с углом  $30^\circ$  при вершине  $A$ . Окружность, вписанная в треугольник  $BMC$ , касается его сторон  $BC$  и  $BM$  в точках  $P$  и  $Q$ .

- а) Докажите, что  $PQ \parallel CM$ .
- б) Найдите  $PQ$ , если  $AB = 8$ .

**Решение**

**8В.** Точка  $E$  расположена вне квадрата  $ABCD$  с центром  $O$ , причём треугольник  $BEC$  прямоугольный ( $\angle E = 90^\circ$ ) и неравносторонний. Точка  $M$  — середина стороны  $BC$ .

- а) Докажите, что треугольник  $OME$  равнобедренный.
- б) Прямая  $EO$  пересекает сторону  $AD$  квадрата в точке  $K$ . Найдите отношение  $AK : KD$ , если  $\angle CBE = 30^\circ$ .

**Решение**

**9В.** Две стороны треугольника равны 1 и 5, площадь треугольника равна 2. Медиана, проведённая к его третьей стороне, меньше её половины.

- а) Докажите, что треугольник тупоугольный.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

**Решение**

**10В.** На отрезке  $BD$  взята точка  $C$ . Биссектриса  $BL$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$  является боковой стороной равнобедренного треугольника  $BLD$  с основанием  $BD$ .

- а) Докажите, что треугольник  $DCL$  равнобедренный.
- б) Известно, что  $\cos \angle ABC = \frac{3}{4}$ . В каком отношении прямая  $DL$  делит сторону  $AB$ ?

**Решение**

**11В (ЕГЭ 2014).** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с углом  $120^\circ$  при вершине  $A$  проведена биссектриса  $BD$ . В треугольник  $ABC$  вписан прямоугольник  $DEFH$  так, что сторона  $FH$  лежит на отрезке  $BC$ , а вершина  $E$  — на отрезке  $AB$ .

а) Докажите, что  $FH = 2DH$ .

б) Найдите площадь прямоугольника  $DEFH$ , если  $AB = 4$ .

[Решение](#)

**12В (ЕГЭ 2014).** Высоты  $BB_1$  и  $CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ .

а) Докажите, что  $\angle AHB_1 = \angle ACB$ .

б) Найдите  $BC$ , если  $AH = 8\sqrt{3}$  и  $\angle BAC = 60^\circ$ .

[Решение](#)

**13В (ЕГЭ 2016).** В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AK$  и  $CM$ . На них из точек  $M$  и  $K$  опущены перпендикуляры  $ME$  и  $KH$  соответственно.

а) Докажите, что прямые  $EH$  и  $AC$  параллельны.

б) Найдите отношение  $EH : AC$ , если  $\angle ABC = 30^\circ$ .

[Решение](#)

**14В.** Высоты  $AA_1$  и  $BB_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AB$  и  $CH$  соответственно.

а) Докажите, что треугольники  $A_1MB_1$  и  $A_1NB_1$  равнобедренные.

б) Найдите площадь четырёхугольника  $A_1MB_1N$ , если  $A_1B_1 = 6$  и  $MN = 4$ .

[Решение](#)

**15В.** Высота  $AH$  и медиана  $AM$  треугольника  $ABC$  делят угол  $BAC$  треугольника  $ABC$  на три равные части, причём точка  $H$  лежит между  $B$  и  $M$ . Из точки  $M$  опущен перпендикуляр  $MK$  на сторону  $AC$ .

а) Докажите, что  $MK = BH$ .

б) Найдите углы треугольника  $ABC$ .

[Решение](#)



**16В.** Медианы  $AM$  и  $BN$  треугольника  $ABC$  перпендикулярны и пересекаются в точке  $P$ .

а) Докажите, что  $CP = AB$ .

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AC = 3$  и  $BC = 4$ .

[Решение](#)

**17В.** В треугольнике  $ABC$  высота  $BD$  равна 6, медиана  $CE$  равна 5, расстояние от точки пересечения отрезков  $BD$  и  $CE$  до стороны  $AC$  равно 1.

а) Докажите, что  $CD : AD = 1 : 4$ .

б) Найдите площадь треугольника  $AEC$ .

[Решение](#)

**18В.** Дан треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 3$ ,  $AC = \sqrt{73}$  и медианой  $AM = 4$ .

а) Докажите, что медиана  $AM$  перпендикулярна стороне  $AB$ .

б) Найдите высоту треугольника  $ABC$ , проведённую из вершины  $A$ .

[Решение](#)

**19В.** Медиана  $AM$  и высота  $CH$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) пересекаются в точке  $K$ . Известно, что  $CK = 5$ ,  $KH = 1$ .

а) Докажите, что  $AN : BH = 1 : 4$ .

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

[Решение](#)

**20В.** В треугольнике  $ABC$  биссектриса  $BE$  и медиана  $AD$  перпендикулярны.

а) Докажите, что  $CE = 2AE$ .

б) Найдите стороны треугольника  $ABC$ , если  $BE = AD = 8$ .

[Решение](#)

**21В (ЕГЭ 2016).** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  точки  $M$  и  $N$  — середины катетов  $AC$  и  $BC$  соответственно,  $CH$  — высота.

а) Докажите, что прямые  $MN$  и  $NH$  перпендикулярны.

б) Пусть  $P$  — точка пересечения прямых  $AC$  и  $NH$ , а  $Q$  — точка пересечения прямых  $BC$  и  $MN$ . Найдите площадь треугольника  $PQM$ , если  $AN = 12$  и  $BH = 3$ .

[Решение](#)

**22В (ЕГЭ 2016).** На продолжении стороны  $AC$  за вершину  $A$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $D$  так, что  $AD = AB$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , параллельно  $BD$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $M$ .

а) Докажите, что  $AM$  — биссектриса треугольника  $ABC$ .

б) Найти  $S_{AMB D}$ , если  $AC = 30$ ,  $BC = 18$  и  $AB = 24$ .

### Решение

**23В.** На катетах  $AC$  и  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  вне треугольника построены квадраты  $ACDE$  и  $BFKC$ . Точка  $M$  — середина гипотенузы  $AB$ ,  $H$  — точка пересечения прямых  $CM$  и  $DK$ .

а) Докажите, что  $CM \perp DK$ .

б) Найдите  $MH$ , если известно, что катеты треугольника  $ABC$  равны 130 и 312.

### Решение

**24В.** Прямая, проходящая через середину  $M$  гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ , перпендикулярна  $CM$  и пересекает катет  $AC$  в точке  $K$ . При этом  $AK : KC = 1 : 2$ .

а) Докажите, что  $\angle BAC = 30^\circ$ .

б) Пусть прямые  $MK$  и  $BC$  пересекаются в точке  $P$ , а прямые  $AP$  и  $BK$  — в точке  $Q$ . Найдите  $KQ$ , если  $BC = \sqrt{21}$ .

### Решение

**25В (ЕГЭ 2018).** В треугольнике  $ABC$  угол  $ABC$  тупой,  $H$  — точка пересечения продолжений высот, угол  $AHC$  равен  $60^\circ$ .

а) Докажите, что угол  $ABC$  равен  $120^\circ$ .

б) Найдите  $BH$ , если  $AB = 7$ ,  $BC = 8$ .

### Решение

**26В.** Из вершин  $A$  и  $B$  тупоугольного треугольника  $ABC$  проведены высоты  $BQ$  и  $AN$ . Известно, что угол  $B$  — тупой,  $BC : CH = 4 : 5$ ,  $BH = BQ$ .

а) Докажите, что диаметр описанной вокруг треугольника  $ABQ$  окружности в  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$  раз больше  $BQ$ .

б) Найдите площадь четырехугольника  $ANBQ$ , если площадь треугольника  $HQC$  равна 25.

### Решение

**27В.** На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  вне его построены квадраты  $ACDE$  и  $CBFG$ . Точка  $M$  — середина стороны  $AB$ .

- а) Докажите, что точка  $M$  равноудалена от центров квадратов.
- б) Найдите площадь треугольника  $DMG$ , если  $AC = 6$ ,  $BC = 8$ ,  $AB = 10$ .

[Решение](#)

**28В (ЕГЭ 2019).** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  точка  $M$  лежит на катете  $AC$ , а точка  $N$  лежит на продолжении катета  $BC$  за точку  $C$ , причём  $CM = BC$  и  $CN = AC$ . Отрезки  $CP$  и  $CQ$  — биссектрисы треугольников  $ACB$  и  $NCM$  соответственно.

- а) Докажите, что  $CP$  и  $CQ$  перпендикулярны.
- б) Найдите  $PQ$ , если  $BC = 3$ , а  $AC = 5$ .

[Решение](#)

**29В.** Дана трапеция  $ABCD$ . Биссектриса угла  $BAD$  пересекает продолжение основания  $BC$  в точке  $K$ .

- а) Докажите, что треугольник  $ABK$  равнобедренный.
- б) Найдите биссектрису  $BM$  треугольника  $ABK$ , если  $AD = 10$ ,  $BC = 2$ ,  $AB = CD = 5$ .

[Решение](#)

**30В.** Медианы треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ .

- а) Докажите, что треугольники  $AMB$ ,  $AMC$  и  $BMC$  равновелики.
- б) Известно, что треугольник  $ABC$  прямоугольный, а точка  $M$  удалена от катетов на расстояния 3 и 4. Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы.

[Решение](#)

**31В.** Диагональ  $AC$  прямоугольника  $ABCD$  с центром  $O$  образует со стороной  $AB$  угол  $30^\circ$ . Точка  $E$  лежит вне прямоугольника, причём  $\angle BEC = 120^\circ$ .

- а) Докажите, что  $\angle CBE = \angle COE$ .
- б) Прямая  $OE$  пересекает сторону  $AD$  прямоугольника в точке  $K$ . Найдите  $EK$ , если  $BE = 40$  и  $CE = 24$ .

[Решение](#)

**32В.** Окружность, построенная на биссектрисе  $BL$  равнобедренного треугольника  $ABC$  как на диаметре, пересекает основание  $BC$  в точке  $P$ . Боковая сторона треугольника вдвое больше его основания.

- а) Докажите, что  $BP = 5CP$ .
- б) Пусть указанная окружность пересекает сторону  $AB$  в точке  $M$ . Найдите  $BL$ , если  $ML = \frac{\sqrt{15}}{2}$ .

[Решение](#)

**33В.** Дан треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 4$ ,  $BC = 6$  и  $AC = 8$ .

- а) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности, параллельна стороне  $BC$ .
- б) Найдите длину биссектрисы треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $A$ .

[Решение](#)

**34В.** Высоты, проведённые из вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$ , равны 20, 15 и 12 соответственно.

- а) Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
- б) Найдите длину биссектрисы треугольника, проведённой из вершины  $C$ .

[Решение](#)

**35В.** На гипотенузу  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  опустили высоту  $CH$ . Из точки  $H$  на катеты опустили перпендикуляры  $HK$  и  $HE$ .

- а) Докажите, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $K$  и  $E$  лежат на одной окружности.
- б) Найдите радиус этой окружности, если  $AB = 12$ ,  $CH = 5$ .

[Решение](#)

**36В.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  проведена высота  $CD$ . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ACD$  и  $BCD$ , равны 0,6 и 0,8.

- а) Докажите подобие треугольников  $ACD$  и  $BCD$ .
- б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

[Решение](#)

**37В.** В треугольнике  $ABC$  известны стороны  $AB = 4$ ,  $AC = \sqrt{17}$  и  $BC = 5$ . На стороне  $AB$  взята точка  $D$  такая, что  $AD = 1$ .

- а) Докажите, что  $CD$  и  $AB$  перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников  $BDC$  и  $ADC$ .

[Решение](#)



**38В.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$   $AC$  — основание. На продолжении стороны  $CB$  за точку  $B$  отмечена точка  $D$  так, что угол  $CAD$  равен углу  $ABD$ .

а) Докажите, что  $AB$  биссектриса угла  $CAD$ .

б) Найдите длину отрезка  $AD$ , если боковая сторона треугольника  $ABC$  равна 5, а его основание равно 6.

**Решение**

**39В.** В прямоугольном неравнобедренном треугольнике  $ABC$  из вершины  $C$  прямого угла проведены высота  $CH$ , медиана  $CM$  и биссектриса  $CL$ .

а) Докажите, что  $CL$  является биссектрисой угла  $MCH$ .

б) Найдите длину биссектрисы  $CL$ , если  $CH = 3$ ,  $CM = 5$ .

**Решение**

**40В.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  высоты  $AA_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ .

а) Докажите, что треугольники  $AOC$  и  $C_1OA_1$  подобны.

б) Найдите площадь четырехугольника  $ACA_1C_1$ , если известно, что угол  $ABC$  равен  $30^\circ$ , а площадь треугольника  $ABC$  равна 80.

**Решение**

**41В.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AA_1$  и  $CC_1$ , точки  $K$  и  $M$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $B$  на прямые  $AA_1$  и  $CC_1$ .

а) Докажите, что  $MK \parallel AC$ .

б) Найдите площадь треугольника  $KBM$ , если  $AC = 10$ ,  $BC = 6$ ,  $AB = 8$ .

**Решение**

**42В (ЕГЭ 2020).** На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  соответственно, причем  $AC_1 : C_1B = 7 : 12$ ,  $BA_1 : A_1C = 3 : 1$ ,  $AB_1 : B_1C = 3 : 4$ . Отрезки  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $D$ .

а) Докажите, что четырехугольник  $ADA_1B_1$  — параллелограмм.

б) Найдите  $CD$ , если отрезки  $AD$  и  $BC$  перпендикулярны,  $AC = 21$ ,  $BC = 16$ .

**Решение**

**43В.** В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = AC = 10$ ,  $BC = 12$ . На стороне  $AB$  отметили точки  $M_1$  и  $M_2$  так, что  $AM_1 < AM_2$ . Через точки  $M_1$  и  $M_2$  провели прямые, перпендикулярные стороне  $AB$  и отсекающие от треугольника  $ABC$  пятиугольник, в который можно вписать окружность.

а) Докажите, что  $AM_1 : BM_2 = 1 : 3$ .

б) Найдите площадь данного пятиугольника.

**Решение**

**44В (ЕГЭ 2021).** Отрезок  $CH$  – высота прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$ . На катетах  $AC$  и  $BC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно такие, что  $\angle MHN = 90^\circ$ .

а) Докажите, что треугольник  $MNH$  подобен треугольнику  $ABC$ .

б) Найдите  $CN$ , если  $BC = 2$ ,  $AC = 4$ ,  $CM = 1$ .

**Решение**

**45В (ЕГЭ 2022).** В треугольник  $ABC$  вписана окружность, которая касается  $AB$  в точке  $P$ . Точка  $M$  – середина стороны  $AB$ .

а) Докажите, что  $MP = \frac{|BC - AC|}{2}$ .

б) Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что длина отрезка  $MP$  равна половине радиуса вписанной в треугольник  $ABC$  окружности,  $BC > AC$ , а отрезки  $MC$  и  $MA$  равны.

**Решение**

**46В (ЕГЭ 2023).** На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $C_1$  и  $B_1$  соответственно. Оказалось, что  $BC = B_1C = BC_1$ .

а) Докажите, что точки  $B$ ,  $C$  и середины отрезков  $BB_1$  и  $CC_1$  лежат на одной окружности.

б) Найдите косинус угла между прямыми  $BB_1$  и  $CC_1$ , если  $BC = 8$ ,  $AB = 15$ ,  $AC = 17$ .

**Решение**

**47В (ЕГЭ 2024).** Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . В нём высоты  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $H$ .

а) Докажите, что  $\angle BAH = \angle BB_1C_1$ .

б) Найдите расстояние от центра описанной окружности треугольника  $ABC$  до его стороны  $BC$ , если известно, что  $B_1C_1 = 18$ , а  $\angle BAC = 30^\circ$ .

**Решение**

## ОТВЕТЫ

1В.  $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ . 2В. 4. 3В.  $2\sqrt{5}$ . 4В.  $3:1$ . 5В. 31,5. 6В. 180. 7В. 2. 8В.  $\sqrt{3}:3$ .  
9В.  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ . 10В.  $21:4$ . 11В.  $24-12\sqrt{3}$ . 12В. 24. 13В.  $3:4$ . 14В. 12. 15В.  
 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ . 16В.  $\sqrt{11}$ . 17В. 10. 18В. 2,4. 19В. 30. 20В.  $2\sqrt{13}, 4\sqrt{13}, 6\sqrt{5}$ .

- 21В. 50. 22В. 268,8. 23В. 289. 24В. 14. 25В.  $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ . 26В.  $\frac{40}{3}$ . 27В. 49. 28В.  $\frac{15}{4}$ .  
29В.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ . 30В. 2,4. 31В. 113. 32В.  $\sqrt{10}$ . 33В.  $2\sqrt{6}$ . 34В.  $\frac{60\sqrt{2}}{7}$ . 35В. 6,5. 36В.  
1. 37В. 2. 38В.  $\frac{150}{11}$ . 39В.  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ . 40В. 20. 41В. 2,4. 42В. 11. 43В.  $\frac{282}{7}$ . 44В. 1,5.  
45В.  $\angle C = 90^\circ$ ;  $\angle A = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$ ;  $\angle B = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ . 46В.  $\frac{\sqrt{17}}{17}$ . 47В. 18.