

ЗАДАЧИ, СВОДЯЩИЕСЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

В этом разделе будут рассмотрены задачи с параметрами, решение которых сводится к исследованию расположения корней квадратных уравнений и неравенств относительно некоторых чисел только после определенных предварительных действий: замены переменной, алгебраических действий и т.д. В основном это будут показательные, логарифмические, алгебраические и тригонометрические уравнения и неравенства, которые после замены переменной приводятся к квадратным. Для этого необходимо хорошо знать свойства показательной, логарифмической и тригонометрических функций. В частности, необходимо знать область определения, множество значений, промежутки возрастания и убывания этих функций, а также уметь решать простейшие уравнения и неравенства, содержащие эти функции.

Кроме вышесказанного, для решения задач из этой темы будут использованы материалы, изученные в предыдущих разделах:

Исследование дискриминанта и применение теоремы Виета;

(https://math100.ru/prof-ege_2022_17-2/)

Расположение корней квадратного трехчлена относительно данных чисел;

(https://math100.ru/prof-ege_2022_17-3/)

Квадратные неравенства с параметрами.

(https://math100.ru/prof-ege_2022_17-4/)

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение

$$a \cdot 4^x - 2 \cdot 2^x + 1 = 0$$

имеет единственное решение?

Решение. При $a=0$ уравнение примет вид $-2 \cdot 2^x + 1 = 0$, откуда $x = -1$. Если $a \neq 0$, то, положив $2^x = t$ ($t > 0$), получим квадратное уравнение относительно t :

$$a \cdot t^2 - 2t + 1 = 0. \quad (1)$$

Полученное уравнение имеет одно решение t , если его дискриминант равен нулю $D = 4 - 4a = 0$, откуда $a = 1$. При $a = 1$ корень уравнения (1) $t = 1$, т.е. больше нуля, следовательно, исходное уравнение будет иметь один корень.

Не рассмотрен еще один случай, а именно, когда уравнение (1) имеет два решения, но только одно из них положительное. Это условие можно записать, используя теорему о знаках корней квадратного трехчлена с помощью следующего соотношения

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{1}{a} < 0.$$

Откуда получаем $a < 0$.

Случай когда один корень уравнения (1) равен 0, а второй больше 0 невозможен, т.к. $t = 0$ не удовлетворяет уравнению (1).

Таким образом, исходное уравнение имеет единственное решение при $a \leq 0$ и $a = 1$.

Пример 2. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sin^2 x + a \cdot \sin x = a^2 - 1$$

имеет решения?

Решение. После замены переменной $\sin x = t$, где $-1 \leq t \leq 1$, исходная задача сводится к следующей: «при каких значениях параметра a уравнение

$$t^2 + at - a^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

имеет хотя бы одно решение на множестве $-1 \leq t \leq 1$ »?

Можно вычислить корни уравнения (2) и попытаться определить значения параметра, при которых хотя бы один из найденных корней удовлетворяет условию $-1 \leq t \leq 1$. Такой способ приведет к необходимости решения нескольких иррациональных неравенств, и назвать его рациональным нелегко.

Для решения данной задачи наиболее рациональным будет использование теоремы о расположении корней квадратного трехчлена.

Случай, когда только один из корней квадратного трехчлена

$$f(t) = t^2 + at - a^2 + 1$$

лежит на отрезке $[-1; 1]$, разрешается условием

$$f(-1) \cdot f(1) \leq 0.$$

Решение этого неравенства имеет вид $-2 \leq a \leq -1$ и $1 \leq a \leq 2$.

Случай, когда оба корня рассматриваемого трехчлена лежат на отрезке $[-1; 1]$, описывается системой неравенств

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(-1) \geq 0, \\ f(1) \geq 0, \\ -1 \leq t_B \leq 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $-1 \leq a \leq -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\frac{2}{\sqrt{5}} \leq a \leq 1$. Таким образом, исходное уравнение имеет решение при $-2 \leq a \leq -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\frac{2}{\sqrt{5}} \leq a \leq 2$.

Задачи этого раздела для самостоятельного решения мы решили не разбивать на несколько уровней сложности и всем им присвоили уровень В.

Уровень В

1В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $a \log_3^2 x - (a - 2) \log_3 x - 2 \geq 0$ имеет единственное решение.

Решение

2В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $a \log_5^2 x - (a + 3) \log_5 x + 3 \leq 0$ имеет единственное решение.

Решение

3В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $25^x - 2(a+1) \cdot 5^x + 9a - 5 = 0$ имеет ровно один корень.

Решение

4В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $9^x + (a+2) \cdot 3^x + \frac{a}{2} + 3 = 0$ имеет ровно один корень.

Решение

5В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{5a}{a-3} \cdot 7^{|x|} = 49^{|x|} + \frac{6a+7}{a-3}$ имеет два различных корня.

Решение

6В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{4a}{a-6} \cdot 3^{|x|} = 9^{|x|} + \frac{3a+4}{a-6}$ имеет два различных корня.

Решение

7В. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $3 \cdot 4^x - 6a \cdot 2^x + 3a^2 + 2a - 14 < 0$ не имеет решений.

Решение

8В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $9^x - 2a \cdot 3^x + a^2 + a - 5 < 0$ не имеет решений.

Решение

9В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sin^2 x + a \sin x = a^2 - 1$ имеет решения.

Решение

10В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2 \cos 2x - 4a \cos x + a^2 + 2 = 0$ не имеет корней.

Решение

11В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4^{\sin x} + a \cdot 2^{\sin x} + a^2 - 1 = 0$ не имеет корней.

Решение

12В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $25^{x^2} - 2(a+1)5^{x^2} + 9a - 5 = 0$ имеет четыре различных решения.

Решение

13В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\frac{2ax + a(1-2a)}{2a^2 + 2ax - 1} < 0$ выполняется для любых значений переменной x из отрезка $[-2; 2]$.

Решение

14В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\frac{6ax - a(2-a)}{a^2 - 6ax - 8} > 0$ выполняется для любых значений переменной x из отрезка $[-3; 3]$.

Решение

15В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\lg^2(3x^2 + 6x + 4) + (5a^2 - a + 4)\lg(3x^2 + 6x + 4) - a - 2 = 0$ имеет хотя бы один корень.

Решение

16В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\lg^2(5x^2 - 10x + 6) + (3a^2 - 5a + 6)\lg(5x^2 - 10x + 6) - 4a + 3 = 0$ имеет хотя бы один корень.

Решение

17В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_3^2(7x^2 + 1) + (3a^2 - a + 3)\log_3(7x^2 + 1) + 4a^2 - a^4 = 0$ имеет хотя бы один корень.

Решение

18В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_5^2(4x^2 + 1) + (2a^2 - 3a + 4)\log_5(4x^2 + 1) + 9a^2 - a^4 = 0$ имеет хотя бы один корень.

Решение

19В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_3(9^x + 9a) = x$ имеет два различных корня.

Решение

20В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_2(4^x - a) = x$ имеет два различных корня.

Решение

21В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $36^x - 2(a+1) \cdot 6^x + a^2 + 2a - 8 = 0$ имеет единственный корень.

Решение

22В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $9^x - 2(2a + 1) \cdot 3^x + a^2 + 4a - 12 = 0$ имеет единственный корень.

Решение

23В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2x^4 + (a - 2)x^3 + 2x^2 + (a - 2)x + 2 = 0$ имеет не менее двух различных отрицательных корней.

Решение

24В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2x^4 - (5a + 2)x^3 + 2x^2 - (5a + 2)x + 2 = 0$ имеет не менее двух различных положительных корней.

Решение

25В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = a$ имеет не менее трех различных отрицательных корней.

Решение

26В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = -a$ имеет не менее трех различных положительных корней.

Решение

27В (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(\log_6(x + a) - \log_6(x - a))^2 - 4a(\log_6(x + a) - \log_6(x - a)) + 3a^2 + 4a - 4 = 0$ имеет ровно два решения.

Решение

28В (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $((a - 2)x^2 + 6x)^2 - 4((a - 2)x^2 + 6x) + 4 - a^2 = 0$ имеет ровно два решения.

Решение

29В (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\left(x + \frac{1}{x - a}\right)^2 - (a + 9)\left(x + \frac{1}{x - a}\right) + 2a(9 - a) = 0$ имеет ровно четыре решения.

Решение

30В (ЕГЭ 2014). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(\operatorname{tg} x + 6)^2 - (a^2 + 2a + 8)(\operatorname{tg} x + 6) + a^2(2a + 8) = 0$ имеет на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ ровно два решения.

Решение

31В. Найдите все целые значения параметра a , при каждом из которых уравнение $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \frac{x}{2} = 3a$ имеет хотя бы один корень.

Решение

32В. Найдите все целые значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2 - 2\cos 2x = 3a + 4\sin x$ имеет хотя бы один корень.

Решение

33В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $a(\cos^2 x - 3)^2 + 2a + 11\sin^2 x < 44$ выполняется для любого действительного значения x .

Решение

34В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $a(\sin^2 x - 3)^2 + 2a + 88 > 22\cos^2 x$ выполняется для любого действительного значения x .

Решение

35В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $5^x - (a - 5) \cdot (0,2)^x + 2 \leq a$ имеет хотя бы одно решение.

Решение

36В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $4^x - (a + 2) \cdot (0,25)^x \leq a + 5$ имеет хотя бы одно решение.

Решение

37В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(ax^2 + 4x + a)$ выполняется для любого значения x .

Решение

38В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\log_{0,2}(4x^2 + 1) \leq 2 + \log_{0,2}(4ax^2 - 40x + a)$ выполняется для любого значения x .

Решение

39В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = x^2 + 16y^2, \\ x + 4y + 9z = a \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

Решение

40В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 3z, \\ x + 2y + 3z = a \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

Решение

41В (ЕГЭ 2013). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(4\cos x - 3 - a)\cos x - 2,5\cos 2x + 1,5 = 0$ имеет хотя бы один корень.

Решение

42В (ЕГЭ 2013). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

Решение

43В (ЕГЭ 2013). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|\sin^2 x + 2\cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$ имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственный корень.

Решение

44В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4^x + (a - 6) \cdot 2^x = (2 + 3|a|) \cdot 2^x + (a - 6)(3|a| + 2)$ имеет единственное решение.

Решение

45В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{4^{-x^2} - a \cdot 2^{1-x^2} + a}{2^{1-x^2} - 1} = 3$ имеет хотя бы одно решение.

Решение

46В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) = a$ имеет ровно три корня.

Решение

47В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2a(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$ имеет четыре различных корня.

Решение

48В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\log_{0,5}(x^2 + ax + 1) < 1$ выполняется для любого $x < 0$.

Решение

49В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} \log_3(y-3) - 2\log_9 x = 0, \\ (x+a)^2 - 2y - 5a = 0 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

Решение

50В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4^x + a \cdot 25^x = 3 \cdot 10^x$ имеет хотя бы один корень.

Решение

51В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4^x + a \cdot 49^x = 4 \cdot 14^x$ имеет хотя бы один корень.

Решение

52В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sin^2 x + (a-2)^2 \sin x + a(a-2)(a-3) = 0$ на отрезке $[0; 2\pi]$ имеет ровно три различных корня.

Решение

53В (ЕГЭ 2021). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|a-2| \cdot x^4 - 2ax^2 + |a-12| = 0$ имеет хотя бы два различных корня.

Решение

ОТВЕТЫ

- 1В.** -2 . **2В.** 3 . **3В.** $\left(-\infty; \frac{5}{9}\right] \cup \{1; 6\}$. **4В.** $(-\infty; -6] \cup \{-4\}$. **5В.** $\{-42\} \cup (-2; 3)$.
6В. $\{-12\} \cup (6; \infty)$. **7В.** $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{43}}{3}\right] \cup [7; \infty)$. **8В.** $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup [5; \infty)$. **9В.**
 $\left[-2; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; 2\right]$. **10В.** $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$. **11В.** $\left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{13}-1}{4}; \infty\right)$.
12В. $\left(\frac{6}{7}; 1\right) \cup (6; \infty)$. **13В.** $\left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{6}}{2}\right) \cup (2, 5; \infty)$. **14В.**
 $(-\infty; -9-\sqrt{89}) \cup (20; \infty)$. **15В.** $[-2; \infty)$. **16В.** $[0, 75; \infty)$. **17В.**
 $(-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [2; \infty)$. **18В.** $(-\infty; -3] \cup \{0\} \cup [3; \infty)$. **19В.** $\left(0; \frac{1}{36}\right)$. **20В.** $\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$.

- 21B. $(-4; 2]$. 22B. $(-6; 2]$. 23B. $(5; \infty)$. 24B. $(0, 2; \infty)$. 25B. $\left(-1; \frac{9}{16}\right)$. 26B. $\left(-\frac{9}{16}; 1\right)$. 27B. $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; \infty)$. 28B. $(-\infty; -1) \cup \{0; 2\} \cup (5; \infty)$. 29B. $(-\infty; -2) \cup (2; 3) \cup \left(3; \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{2}; \infty\right)$. 30B. $(-\sqrt{6}; -2) \cup (-2; -1) \cup \{4\}$. 31B. $-1; 0; 1$. 32B. $0; 1; 2$. 33B. $(-\infty; 3)$. 34B. $(-6; \infty)$. 35B. $[4; \infty)$. 36B. $[-3; \infty)$. 37B. $(2; 3]$. 38B. $(10; 15]$. 39B. $-\frac{17}{48}$. 40B. $-\frac{1}{2}$. 41B. $(-\infty; -6] \cup [0; \infty)$. 42B. $\left[-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (-1; 1]$. 43B. $(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$. 44B. $\{-2; 1\} \cup [6; \infty)$. 45B. $(-\infty; -3) \cup [-2; \infty)$. 46B. $\frac{9}{16}$. 47B. $\left(0; \frac{1}{8}\right)$. 48B. $(-\infty; \sqrt{2})$. 49B. $\left[-\frac{7}{3}; 6\right)$. 50B. $\left(-\infty; \frac{9}{4}\right]$. 51B. $(-\infty; 4]$. 52B. $0; 2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. 53B. $\left[\frac{12}{7}; 3\right] \cup [4; \infty)$.