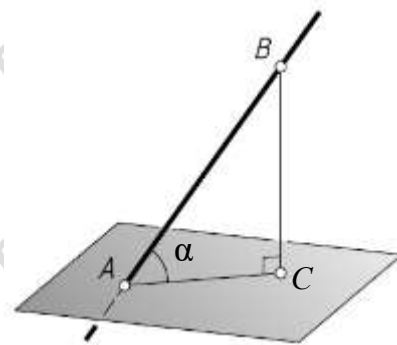


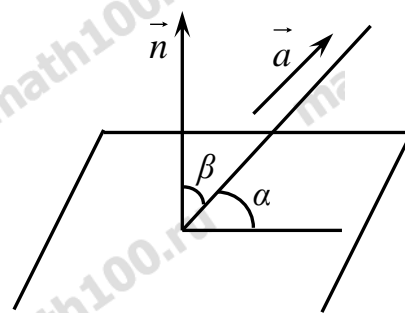
## УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 14 профильного ЕГЭ по теме «Угол между прямой и плоскостью». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

**Угол между прямой и плоскостью.** Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой ( $AB$ ) и ее проекцией на данную плоскость ( $AC$ ), т.е. синус этого угла  $\alpha$  равен отношению противолежащего катета  $BC$  к гипотенузе  $AB$ . На практике нахождение этого угла чаще всего сводится к нахождению расстояния от точки до плоскости, т.е. к нахождению длины отрезка  $BC$ . Очевидно,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен  $90^\circ$ . Если прямая параллельна плоскости или лежит в ней, то угол между ними считается равным нулю.



**Нахождение угла между прямой и плоскостью координатным методом.** Пусть  $\vec{a}$  - вектор лежащий на прямой (или параллельный ей), который еще называют **направляющим вектором прямой**, а вектор  $\vec{n}$  - это вектор перпендикулярный плоскости (нормальный вектор плоскости). Искомый угол - это угол  $\alpha$ . Используя скалярное произведение находим косинус угла  $\beta$ :  $\cos \beta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$ . Так как  $\beta = 90^\circ - \alpha$ ,



то последняя формула примет вид:  $\sin \alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$ .

### Уровень А

**1А.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите углы: а) между прямой  $BD_1$  и плоскостью  $ACC_1$ ; б) между прямой  $A_1 B_1$  и плоскостью  $C_1 BD$ ; в) между прямой  $BB_1$  и плоскостью  $ACD_1$ ; г) между прямой  $BD$  и плоскостью  $ADC_1$ .

**2А.** Дан правильный тетраэдр  $ABCD$ . Точки  $K$ ,  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $BD$ ,  $AB$  и  $AC$  соответственно. Найдите углы: а) между прямой  $CD$  и плоскостью  $ABD$ ; б) между прямой  $DM$  и плоскостью  $ADC$ ; в) между прямой  $KN$  и плоскостью  $ADC$ ; г) между прямой  $BD$  и плоскостью  $KMN$ .

**3А.** Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Все рёбра пирамиды равны,  $K$  — середина бокового ребра  $SC$ . Найдите углы: а) между прямой  $BK$  и плоскостью  $ABC$ ; б) между прямой  $AC$  и плоскостью  $ASB$ ; в) между прямой  $AK$  и плоскостью  $BSC$ ; г) между прямой  $SA$  и плоскостью  $CSD$ .

**4А.** Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , все рёбра которой равны 1. Точка  $M$  — середина ребра  $BC$ . Найдите углы: а) между прямой  $A_1M$  и плоскостью  $ABC$ ; б) между прямой  $BB_1$  и плоскостью  $AB_1C_1$ ; в) между прямой  $C_1M$  и плоскостью  $ABB_1$ ; г) между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $A_1C_1M$ .

**5А.** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , все рёбра которой равны 1. Найдите углы: а) между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $BCE_1$ ; б) между прямой  $BC_1$  и плоскостью  $AFF_1$ ; в) между прямой  $BD_1$  и плоскостью  $ABB_1$ ; г) между прямой  $BE_1$  и плоскостью  $ABB_1$ .

**6А.** Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите углы: а) между прямой  $BC$  и плоскостью  $ASF$ ; б) между прямой  $AB$  и плоскостью  $BSC$ ; в) между прямой  $SA$  и плоскостью  $BSC$ ; г) между прямой  $AC$  и плоскостью  $CSD$ .

**7А.** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1B_1C_1D_1$ , у которого  $AA_1 = 3$ ,  $AD = 8$ ,  $AB = 6$ , найдите угол между плоскостью  $ADD_1$  и прямой  $EF$ , проходящей через середины рёбер  $AB$  и  $B_1C_1$ .

**8А.** В основании прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$ , у которого угол  $C$  равен  $90^\circ$ , а угол  $A$  равен  $30^\circ$ ,  $AC = 10\sqrt{3}$ . Диагональ боковой грани  $B_1C$  составляет угол  $30^\circ$  с плоскостью  $AA_1B_1$ . Найдите высоту призмы.

## ОТВЕТЫ

**1А.** а)  $\arctg\sqrt{2}$ ; б)  $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; в)  $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; г)  $30^\circ$ . **2А.** а)  $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; б)  $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$ ; в)  $\arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; г)  $45^\circ$ . **3А.** а)  $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$ ; б)  $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; в)  $\arcsin\frac{2\sqrt{30}}{15}$ ; г)  $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$ . **4А.** а)  $\arctg\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ; б)  $\arctg\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; в)  $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{10}$ ; г)  $\arctg\frac{\sqrt{3}}{4}$ . **5А.** а)  $60^\circ$ ; б)  $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$ ; в)  $60^\circ$ ; г)  $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}$ . **6А.** а)  $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}$ ; б)  $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}$ ; в)  $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{10}$ ; г)  $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}$ . **7А.**  $\arctg\frac{3}{5}$ . **8А.**  $10\sqrt{2}$ .

**Уровень В**

**1В.** Основание треугольной пирамиды  $DABC$  — прямоугольный треугольник  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ). Высота пирамиды проходит через точку  $C$ .

а) Докажите, что противоположные рёбра пирамиды попарно перпендикулярны.

б) Найдите углы, которые образуют боковые рёбра  $DA$  и  $DB$  с плоскостью основания, если  $AC = 15$ ,  $BC = 20$ , а угол между плоскостями  $ABC$  и  $ABD$  равен  $45^\circ$ .

**2В.** Высота  $PC$  треугольной пирамиды  $PABC$  с вершиной  $P$  проходит через точку  $C$ . Прямые  $PA$  и  $BC$  перпендикулярны.

а) Докажите, что основание пирамиды — прямоугольный треугольник.

б) Найдите углы, которые образуют боковые рёбра  $PA$  и  $PB$  с плоскостью основания, если  $AC = 6$ ,  $BC = 8$ , а расстояние от точки  $P$  до прямой  $AB$  равно 5.

**3В.** Дана треугольная пирамида  $SABC$  с основанием  $ABC$ ;  $O$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через прямую  $AB$  и середину отрезка  $SO$ , делит боковое ребро  $SC$  в отношении  $1 : 3$ , считая от вершины  $S$ .

б) Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды, если пирамида правильная, а её высота составляет  $\frac{4}{5}$  от высоты  $SM$  боковой грани  $SAB$ .

**4В.** Дана треугольная пирамида  $SABC$ ;  $O$  — точка пересечения медиан основания  $ABC$ .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через прямую  $AB$  и середину  $M$  ребра  $SC$ , делит отрезок  $SO$  в отношении  $3 : 1$ , считая от вершины  $S$ .

б) Найдите угол между прямой  $BC$  и плоскостью  $ABM$ , если пирамида правильная, а угол между прямой, проходящей через точку  $M$  и середину ребра  $AB$ , и прямой  $SO$  равен  $45^\circ$ .

**5В.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , в котором  $AD = 2$ ,  $AA_1 = 4$ ,  $AB = 2\sqrt{15}$ . Точка  $M$  — середина ребра  $C_1 D_1$ , точка  $N$  лежит на ребре  $AA_1$ , причём  $AN = 3$ .

а) Докажите, что  $MN \perp CB_1$ .

б) Найдите угол между прямой  $MN$  и плоскостью грани  $BB_1 C_1 C$ .

**6В.** Дана прямая призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ , основание которой — прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$  и катетом  $BC$ , вдвое бóльшим бокового ребра призмы. Точка  $M$  — середина ребра  $A_1 C_1$ , точка  $N$  лежит на ребре  $BC$ , причём  $CN : NB = 1 : 3$ .

а) Докажите, что  $MN \perp CB_1$ .

б) Найдите угол между прямой  $MN$  и плоскостью основания  $A_1 B_1 C_1$ , если  $AA_1 : AB = 1 : \sqrt{7}$ .

**7В.** Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$  с основаниями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Скрещивающиеся диагонали  $BA_1$  и  $CB_1$  боковых граней  $AA_1B_1B$  и  $BB_1C_1C$  перпендикулярны.

а) Докажите, что  $AB : AA_1 = \sqrt{2} : 1$ .

б) Найдите угол между прямой  $BA_1$  и плоскостью  $BCC_1$ .

**8В.** Дана правильная четырёхугольная призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с основаниями  $ABCD$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $M$  — середина ребра  $B_1 C_1$ . Прямые  $CA_1$  и  $BM$  перпендикулярны.

а) Докажите, что диагональ основания призмы вдвое больше бокового ребра.

б) Найдите угол между прямой  $CA_1$  и плоскостью  $BCC_1$ .

**9В.** Дана четырёхугольная пирамида  $SABCD$ , основание которой — параллелограмм  $ABCD$ . Точка  $K$  — середина медианы  $SM$  грани  $CSD$ ,  $N$  — середина ребра  $AB$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $KN$  с плоскостью  $ASC$ .

б) Найдите угол между прямой  $KN$  и плоскостью  $ASC$ , если пирамида правильная, а её боковые грани образуют с плоскостью основания углы, равные  $60^\circ$ .

**10В.** Дана треугольная пирамида  $DABC$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $BC$  и  $AD$ ,  $L$  — середина ребра  $AB$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $MN$  с плоскостью  $CDL$ .

б) Найдите угол между прямой  $MN$  и плоскостью  $CDL$ , если пирамида правильная, а угол между её боковым ребром и плоскостью основания  $ABC$  равен  $60^\circ$ .

**11В.** Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Точка  $M$  — середина ребра  $SD$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $A$ ,  $B$  и  $M$ .

б) Найдите угол между прямой  $AM$  и плоскостью  $CSF$ , если  $AB : SA = 1 : \sqrt{19}$ .

**12В.** Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую  $AB$  и середину высоты  $SH$  пирамиды.

б) Пусть  $K$  — точка пересечения этой плоскости с ребром  $SC$ . Найдите угол между прямой  $BK$  и плоскостью  $ASB$ , если  $AB : AS = 1 : 2$ .

**13В.** Точка  $M$  — середина ребра  $AB$  правильного тетраэдра  $DABC$ .

а) Докажите, что ортогональная проекция точки  $M$  на плоскость  $ACD$  лежит на медиане  $AP$  грани  $ACD$ .

б) Найдите угол между прямой  $DM$  и плоскостью  $ACD$ .

**14В.** Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Все рёбра пирамиды равны. Точка  $M$  — середина ребра  $BC$ .

а) Докажите, что ортогональная проекция середины ребра  $AB$  на плоскость  $CSD$  делит медиану  $SN$  этой грани в отношении  $1 : 2$ , считая от вершины  $S$ .

б) Найдите угол между прямой  $SM$  и плоскостью  $CSD$ .



**15B.** Основание  $ABCD$  призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — равнобедренная трапеция с основаниями  $AB$  и  $CD$ . Боковые стороны равны меньшему основанию  $CD$ , а их продолжения пересекаются под углом  $60^\circ$ .

а) Плоскость  $CA_1 D_1$  пересекает ребро  $AB$  в точке  $M$ . Докажите, что прямая  $D_1 M$  проходит через середину диагонали  $A_1 C$ .

б) Найдите угол между боковым ребром  $BB_1$  и плоскостью  $CA_1 D_1$ , если призма прямая, а  $AA_1 : AD = \sqrt{3} : 2$ .

**16B.** Основание  $ABCD$  призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — трапеция с основаниями  $AB = 2CD$ .

а) Докажите, что плоскость  $BA_1 D_1$  проходит через середину бокового ребра  $CC_1$ .

б) Найдите угол между боковым ребром  $AA_1$  и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция  $ABCD$  прямоугольная с прямым углом при вершине  $B$ , а  $BC = CD$  и  $AA_1 = \sqrt{6}CD$ .

**17B.** Точка  $M$  — середина медианы  $BK$  основания  $ABC$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$ , а  $N$  — центр боковой грани  $AA_1 B_1 B$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $MN$  с плоскостью  $A_1 B_1 C_1$ .

б) Найдите угол между прямой  $MN$  и плоскостью грани  $BB_1 C_1 C$ , если известно, что  $\frac{AB}{AA_1} = 2\sqrt{2}$ .

**18B.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  точка  $N$  — центр боковой грани  $AA_1 B_1 B$ , а  $M$  — точка пересечения медиан основания  $ABC$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $MN$  с плоскостью  $A_1 B_1 C_1$ .

б) Найдите угол между прямой  $MN$  и плоскостью  $BB_1 C$ , если известно, что  $\frac{AB}{AA_1} = 2\sqrt{3}$ .

**19B.** Основания  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$  призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  — равносторонние треугольники. Отрезок, соединяющий центр  $O$  основания  $ABC$  с серединой ребра  $A_1 B_1$ , перпендикулярен основаниям призмы.

а) Докажите, что грань  $ABB_1 A_1$  — прямоугольник.

б) Найдите угол между прямой  $BC$  и плоскостью  $ABC_1$ , если высота призмы равна стороне основания.

**20B.** Основания  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$  призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  — равносторонние треугольники. Отрезок, соединяющий центр  $O$  основания  $ABC$  с вершиной  $C_1$ , перпендикулярен основаниям призмы.

а) Докажите, что плоскости  $ABC_1$  и  $OCC_1$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $ABC_1$ , если боковое ребро призмы равно стороне основания.

**21В.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 6. Точка  $M$  – середина ребра  $A_1C_1$ ,  $O$  – точка пересечения диагоналей грани  $ABB_1A_1$ .

а) Докажите, что точка пересечения  $OC_1$  с четырехугольником, являющимся сечением призмы плоскостью  $ABM$ , совпадает с точкой пересечения диагоналей этого четырехугольника.

б) Найдите угол между прямой  $OC_1$  и сечением призмы плоскостью  $ABM$ .

**22В (ЕГЭ 2022).** Точка  $O$  — точка пересечения диагоналей грани  $CDD_1C_1$  куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$ . Плоскость  $DA_1C_1$  пересекает диагональ  $BD_1$  в точке  $F$ .

а) Докажите, что  $BF : FD_1 = A_1F : FO$ .

б) Точки  $M$  и  $N$  — середины ребер  $AB$  и  $AA_1$ , соответственно. Найдите угол между прямой  $MN$  и плоскостью  $DA_1C_1$ .

### ОТВЕТЫ

**1В.**  $\arctg \frac{4}{5}$ ;  $\arctg \frac{3}{5}$ . **2В.**  $\arctg \frac{7}{30}$ ;  $\arctg \frac{7}{40}$ . **3В.**  $\arctg \frac{2}{3}$ . **4В.**  $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$ . **5В.**  $60^\circ$ .  
**6В.**  $45^\circ$ . **7В.**  $45^\circ$ . **8В.**  $\arctg \frac{\sqrt{6}}{3}$ . **9В.**  $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$ . **10В.**  $\arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}$ . **11В.**  $30^\circ$ . **12В.**  $\arccotg 3$ . **13В.**  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$ . **14В.**  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$ . **15В.**  $45^\circ$ . **16В.**  $30^\circ$ . **17В.**  $45^\circ$ . **18В.**  $\arccotg 2$ . **19В.**  $\arcsin \frac{3\sqrt{7}}{14}$ . **20В.**  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ . **21В.**  $\arccos \frac{13}{14}$ . **22В.**  $\arctg \sqrt{2}$ .