

КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

В данном разделе будут рассмотрены квадратные неравенства с параметрами, для решения которых будут использованы материалы, изученные в предыдущих разделах:

Исследование дискриминанта и применение теоремы Виета;
(https://math100.ru/prof-ege_2022_17-2/)

Расположение корней квадратного трехчлена относительно данных чисел.
(https://math100.ru/prof-ege_2022_17-3/)

Также для решения задач этого раздела необходимо уметь «легко» решать квадратные неравенства. В целом решение квадратных неравенств с параметрами вызывает больше трудностей, нежели решений квадратных уравнений с параметрами. Это связано с тем, что при решении неравенств приходится разбирать больше случаев и проводить более тонкие логические рассуждения, чем при решении уравнений.

Задачи для самостоятельного решения разбиты на два уровня сложности А и В. Уровень А представляет собой простейшие квадратные неравенства с параметрами. Уровень В по сложности максимально приближен к 18 заданиям ЕГЭ по профильной математике.

Уровень А

1А. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 > 0$ выполняется при всех значениях x ?

Решение

2А. При каких значениях параметра a неравенство $-x^2 + ax - 9 < 0$ выполняется при всех значениях x ?

Решение

3А. При каких значениях параметра a неравенство $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1 > 0$ выполняется при всех значениях x ?

Решение

4А. При каких значениях параметра a неравенство $(a^2 - 4)x^2 + 2(a + 2)x - 1 < 0$ выполняется при всех значениях x ?

Решение

5А. При каких значениях параметра a неравенство $(2a + 3)x^2 - 2ax + a - 2 \geq 0$ не выполняется ни для одного значения x ?

Решение

6А. При каких значениях параметра a неравенство $(a-3)x^2 - 2ax + 3a - 6 \geq 0$ не выполняется ни для одного значения x ?

Решение

7А. Решите неравенство при всех значениях параметра a : $x^2 - 3ax + 2a^2 \geq 0$.

Решение

8А. Решите неравенство при всех значениях параметра a : $x^2 + (a-5)x - 2a^2 + 2a + 4 < 0$.

Решение

9А. Решите неравенство при всех значениях параметра a : $ax^2 - 2x + 1 > 0$.

Решение

10А. Решите неравенство при всех значениях параметра a : $(1-a^2)x^2 + 2ax + 1 \geq 0$.

Решение

11А. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{x^2 + (2a-1)x + 8 - 9a}{2x^2 - 3x + 3} \leq 1$ выполняется при всех значениях x ?

Решение

12А. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{-x^2 + (2a+2)x - a}{-x^2 + x - 1} \leq 2$ выполняется при всех значениях x ?

Решение

ОТВЕТЫ

1А. $(1; 6)$. **2А.** $(-6; 6)$. **3А.** $[1; \infty)$. **4А.** $[-2; 0)$. **5А.** $(-\infty; -2)$. **6А.** $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. **7А.** $x \in (-\infty; 2a] \cup [a; \infty)$ при $a \in (-\infty; 0)$; $x \in R$ при $a = 0$; $x \in (-\infty; a] \cup [2a; \infty)$ при $a \in (0; \infty)$. **8А.** $x \in (a+1; 4-2a)$ при $a \in (-\infty; 1)$; \emptyset при $a = 1$; $x \in (4-2a; a+1)$ при $a \in (1; \infty)$. **9А.** $x \in \left(\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}; \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}\right)$ при $a \in (-\infty; 0)$; $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ при $a = 0$; $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}; \infty\right)$ при $a \in (0; 1]$; $x \in R$ при $a \in (1; \infty)$.

10А. $x \in \left[\frac{-a + \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}; \frac{-a - \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2} \right]$ при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$; $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2} \right]$ при $a = -1$; $x \in \left[-\frac{1}{2}; \infty \right)$ при $a = 1$; $x \in \left(-\infty; \frac{-a - \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2} \right] \cup \left[\frac{-a + \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}; \infty \right)$ при $a \in \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right)$; $x \in R$ при $a \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$. **11А.** $[1; 6]$. **12А.** $[-2; 1]$.

Уровень В

1В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 - (a - 5)x + a^2 - 4a - 5 < 0$ будет выполняться для любого значения x , принадлежащего интервалу $(-4; 0)$.

Решение

2В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 + (a - 4)x + a^2 - 2a - 8 < 0$ будет выполняться для любого значения x , принадлежащего интервалу $(0; 4)$.

Решение

3В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $4x^2 + 2(a - 2)x + a^2 + 2a - 8 < 0$ будет выполняться для любого значения x , принадлежащего интервалу $(0; 2)$.

Решение

4В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $4x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 4a - 5 < 0$ будет выполняться для любого значения x , принадлежащего интервалу $(-2; 0)$.

Решение

5В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $4(a - 3)x^2 - 2(2a + 1)x + a > 0$ имеет решения и любое его решение принадлежит отрезку $[-2; 2]$.

Решение

6В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $9(a - 1)x^2 - 3(2a + 5)x + a + 2 > 0$ имеет решения и любое его решение принадлежит отрезку $[-3; 3]$.

Решение

7В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(a-3)x^2 - 2(2a-1)x + 4a - 4 > 0$ имеет решения и любое его решение принадлежит отрезку $[-0,5; 0,5]$.

Решение

8В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(a-5)x^2 - (2a-3)x + a - 2 > 0$ имеет решения и любое его решение принадлежит отрезку $[-0,25; 0,25]$.

Решение

9В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 + a^2x - 2a - 4 < 0$ выполняется при всех $x \in [0; 1]$.

Решение

10В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 - ax + a > 0$ выполняется при всех $|x| < 1$.

Решение

11В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $ax^2 + (a+1)x - 3 < 0$ выполняется при всех $x < 2$.

Решение

12В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ выполняется при всех $x > 0$.

Решение

13В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 - 2ax - a^2 + a + 6 < 0$ выполняется при всех $0 \leq x \leq 2$.

Решение

14В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $2x^2 + (a-1)x + 6(a-1) \leq x^2 - x - 6$ выполняется при всех $1 < x < 2$.

Решение

15В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых решением неравенства $x^2 - 2ax - 3 \leq 0$ будет являться отрезок длины 4.

Решение

16В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых решением неравенства $ax^2 - 2(a+1)x + 1 \geq 0$ будет являться отрезок длины меньше 2.

Решение

17В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(x - 3a)(x + 2a + 1) < 0$ выполняется при всех $x \in [1; 3]$.

Решение

18В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(a^2 - x)(x + a + 5) \geq 0$ выполняется при всех $x \in [1; 4]$.

Решение

19В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(a - 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 3 > 0$ выполняется хотя бы при одном $x < 1$.

Решение

20В. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства $x^2 - 3x + 2 < 0$ будет содержаться среди решений неравенства $ax^2 - (3a + 1)x + 3 \geq 0$?

Решение

21В. При каких значениях параметра a любое решение неравенства $x^2 - x - 2 < 0$ больше любого решения неравенства $ax^2 - 4x - 1 \geq 0$?

Решение

22В (ЕГЭ 2010). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (5a + 3)x + 4a^2 \leq 4$ удовлетворяет неравенству $ax(x - 4 - a) \leq 0$.

Решение

23В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства $x^2 - (a^2 + a)x + a^3 \leq 0$ содержит не менее пяти целых чисел.

Решение

24В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} x^2 - 12x + a \leq 0, \\ x \leq 2 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Решение

25В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + (y + 3)^2 < 4, \\ y = 2ax^2 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Решение

26В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} x^2 + 2ax \leq 3a^2 - 8a + 4, \\ x^2 + 4ax > 2 + 5a - 3a^2 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Решение

27В. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 3a - 2 \leq 0, \\ x^2 - 5ax + 6a^2 + a - 1 \leq 0 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Решение

28В. При каких значениях параметра b неравенство $x^2 + (2a + 4b)x + 2a^2b + 4b^2 - 2ab - 6b + 15 \leq 0$ не имеет решений ни при одном значении параметра a ?

Решение

ОТВЕТЫ

1В. $[-1; 3]$. **2В.** $[-2; 2]$. **3В.** $[-4; 0]$. **4В.** $[-5; -1]$. **5В.** $\left(-\frac{1}{16}; \frac{44}{25}\right]$. **6В.** $\left(-\frac{33}{16}; 0, 34\right]$. **7В.** $\left(\frac{11}{12}; \frac{23}{25}\right]$. **8В.** $\left(\frac{31}{16}; \frac{49}{25}\right]$. **9В.** $(-1; 3)$. **10В.** $(0; \infty)$. **11В.** $(-7 - 4\sqrt{3}; 0]$. **12В.** $(1; \infty)$. **13В.** $(-\infty; -5) \cup (3; \infty)$. **14В.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$. **15В.** ± 1 . **16В.** $(-\infty; -1)$. **17В.** $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$. **18В.** $[-6; -2] \cup [2; \infty)$. **19В.** $\left(\frac{3}{4}; \infty\right)$. **20В.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. **21В.** $(-\infty; -4)$. **22В.** $-\frac{5}{3}; -\frac{3}{2}; -1; 1$. **23В.** $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{7}; \infty)$. **24В.** $(-\infty; 20]$. **25В.** $\left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{5}}{16}\right)$. **26В.** $\left(-\infty; \frac{2}{9}\right) \cup (2; \infty)$. **27В.** $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$. **28В.** $\left(\frac{5}{7}; 1\right)$.