

ПЛОЩАДЬ СЕЧЕНИЯ

Задачи уровня А являются подготовительными для решения заданий 14 профильного ЕГЭ по теме «Площадь сечения». Большая часть задач уровня В взята из реальных экзаменационных и диагностических работ прошлых лет.

При нахождении угла между двумя плоскостями можно использовать **теорему о площади ортогональной проекции многоугольника**. При применении этого метода угол φ между плоскостями α и β можно вычислить,

используя формулу $\cos \varphi = \frac{S_{\text{пр}}}{S}$, где S - площадь многоугольника, лежащего в плоскости α , $S_{\text{пр}}$ - площадь его ортогональной проекции на плоскость β . Следовательно, площадь многоугольника, лежащего в плоскости α равна

$$S = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos \varphi}.$$

Уровень А

1А. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) две его диагонали;
- б) середины трёх рёбер, исходящих из одной вершины;
- в) вершину B_1 и середины рёбер AB и AD ;
- г) диагональ AC_1 параллельно прямой BD ;
- д) середину ребра AB параллельно прямым BD и BC_1 .

2А. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) середину ребра AD параллельно плоскости ABC ;
- б) вершину D и середины рёбер AB и BC ;
- в) середину ребра AB параллельно рёбрам AC и BD ;
- г) высоту DH тетраэдра параллельно ребру AC ;
- д) центры граней ABC , ABD и BCD .

3А. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Все рёбра пирамиды равны a . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) середину ребра SA параллельно плоскости основания пирамиды;
- б) диагональ BD основания и середину ребра SC ;
- в) ребро AB и середину ребра SD ;
- г) центр основания параллельно плоскости ASB ;
- д) середину ребра SC и точку A параллельно диагонали BD основания.

4А. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Все рёбра призмы равны a . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) вершины A, B_1 и C ;
- б) ребро BC и центр основания $A_1B_1C_1$;
- в) центры граней ABC, AA_1B_1B и BB_1C_1C ;
- г) прямую BC_1 параллельно медиане AM основания ABC ;
- д) середину ребра BB_1 параллельно прямым BA_1 и B_1C_1 .

5А. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Все рёбра призмы равны a . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) вершины A, B и C_1 ;
- б) вершины B, F и C_1 ;
- в) вершины A, B и D_1 ;
- г) центр основания $ABCDEF$ параллельно прямым DE и AE_1 ;
- д) середины рёбер BC, EF и центр грани AA_1B_1B .

6А. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Стороны основания пирамиды равны a , а боковые рёбра равны $2a$. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) вершину S и диагональ BD основания;
- б) середины рёбер AB и EF параллельно высоте пирамиды;
- в) вершину S и середины рёбер AB и AF ;
- г) точки A, D и середину ребра SE ;
- д) ребро AB и середину ребра SD .

ОТВЕТЫ

1А. а) $a^2\sqrt{2}$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$; в) $\frac{9a^2}{8}$; г) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$; д) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **2А.** а) $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$; б) $\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$;
 в) $\frac{a^2}{4}$; г) $\frac{a^2\sqrt{6}}{9}$; д) $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$. **3А.** а) $\frac{a^2}{4}$; б) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{3a^2\sqrt{11}}{16}$; г) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$; д)
 $\frac{a^2\sqrt{10}}{6}$. **4А.** а) $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$; б) $\frac{5a^2\sqrt{39}}{36}$; в) $\frac{a^2\sqrt{39}}{12}$; г) $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$; д) $\frac{3a^2\sqrt{7}}{16}$. **5А.** а)
 $\frac{3a^2\sqrt{7}}{4}$; б) $a^2\sqrt{6}$; в) $3a^2$; г) $\frac{3a^2}{2}$; д) $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$. **6А.** а) $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; в)
 $\frac{3a^2\sqrt{19}}{16}$; г) $\frac{5a^2\sqrt{15}}{16}$; д) $\frac{13a^2\sqrt{39}}{48}$.

Уровень В

1В. Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.

- а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.
- б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ , если ребро куба равно 2.

2В. В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT : TD = 2 : 1$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

- а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
- б) Найдите площадь сечения.

3В. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке U .

- а) Докажите, что $B_1U : UC_1 = 2 : 1$.
- б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .

4В. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB , A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

- а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
- б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

5В. Дан прямой круговой конус с вершиной M . Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M . Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник тупоугольный.
- б) Найдите площадь сечения.

6В. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 19. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5 : 1$, считая от точки C .
- б) Найдите площадь многоугольника, который является сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

7В. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 5 : 11$, а точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

8В. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E = 6EA$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $4 : 3$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .

9В. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 4, точка K — середина бокового ребра AP .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC .

б) Найдите площадь сечения.

10В. Дана правильная четырехугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На ребре AA_1 отмечена точка K так, что $AK : KA_1 = 1 : 2$. Плоскость α проходит через точки B и K параллельно прямой AC . Эта плоскость пересекает ребро DD_1 в точке M .

а) Докажите, что $MD : MD_1 = 2 : 1$

б) Найдите площадь сечения, если $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

11В. На ребре AB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка Q , причём $AQ : QB = 1 : 2$. Точка P — середина ребра AS .

а) Докажите, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите площадь сечения DPQ , если площадь сечения DSB равна 6.

12В. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 10, а сторона основания равна 12. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG : GB = AF : FC = 1 : 5$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF .

13В. Через вершину S и диагональ BD основания правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ проведена плоскость α .

а) Докажите, что расстояние от центра основания до этой плоскости в три раза меньше расстояния до этой плоскости от точки F .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α , если сторона основания равна $\sqrt{3}$, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 60° .

14В. Плоскость α проходит через сторону AB основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и середину ребра B_1C_1 .

а) Пусть M — точка пересечения плоскости α с прямой CC_1 . Докажите, что C_1 — середина отрезка CM .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если все рёбра призмы равны 4.

15В. Плоскость α перпендикулярна основанию правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S и делит стороны AB и BC основания пополам.

а) Докажите, что плоскость α делит боковое ребро в отношении $1 : 3$, считая от вершины S .

б) Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна 4.

16В. Дана правильная четырёхугольная пирамида $PABCD$ с вершиной в точке P . Через точку C и середину ребра AB перпендикулярно к основанию пирамиды проведена плоскость α .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро BP в отношении $2 : 1$, считая от точки B .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α , если известно, что $PA = 10$, $AC = 16$.

17В. В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной S стороны основания $ABCDEF$ равны 6, а боковые рёбра равны 12. Точки K и M — середины рёбер SF и SE соответственно.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью BKM .

б) Найдите площадь полученного сечения.

18В. Точка M — середина ребра CD единичного куба $ABCA_1B_1C_1D_1$. Через вершину A_1 проведена плоскость, параллельная прямым AM и D_1M .

а) Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра AB .

б) Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

19В. Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точки M и N — середины рёбер AD и CD соответственно, точка K лежит на ребре BB_1 , причём $B_1K : KB = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки M , N и K , делит ребро CC_1 в отношении $2 : 7$, считая от точки C .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью, если параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырёхугольная призма, сторона основания $ABCD$ равна $4\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 12.

20В. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение плоскостью, проходящей через середину M ребра AB , точку B_1 и точку K , лежащую на ребре AC и делящую его в отношении $AK : KC = 1 : 3$.

а) Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра A_1C_1 .

б) Найдите площадь сечения, если известно, что сторона основания призмы равна $4\sqrt{2}$, а высота призмы равна $8\sqrt{2}$.

21В. Основание четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно плоскости SAD .

б) Найдите площадь полученного сечения, если площадь грани SAD равна 16.

22В. Основанием пирамиды $SABCD$ с равными боковыми рёбрами является прямоугольник $ABCD$. Плоскость α проходит через сторону AB основания и середину высоты пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит боковое ребро SD в отношении $1 : 2$, считая от вершины S .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α , если $AB = 6$, $AD = 8$, а высота пирамиды равна 6.

23В. Через середину ребра AB куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость, параллельная прямым BD_1 и $A_1 C_1$.

а) Докажите, что эта плоскость делит диагональ DB_1 в отношении $3 : 5$, считая от вершины D .

б) Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно 4.

24В. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Плоскость α проходит через прямую BA_1 параллельно прямой CB_1 .

а) Докажите, что плоскость α делит диагональ AC_1 параллелепипеда в отношении $1 : 2$, считая от вершины A .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью α , если он прямой, его основание $ABCD$ — ромб с диагоналями $AC = 10$ и $BD = 8$, а боковое ребро параллелепипеда равно 12.

25В. Дана треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$. Плоскость α проходит через прямую BC_1 параллельно прямой AB_1 .

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра AC .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если призма правильная, сторона её основания равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 1.

26В. Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 18. Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M — середина ребра SB , точка L лежит на ребре CD так, что $CL : LD = 7 : 2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобедренная трапеция.

б) Найдите площадь этой трапеции.

27В. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром 10 на ребрах AD , BD и AC выбраны точки K , L и M так, что $KD = 4$, $MC = 6$, $LD = 8$. Плоскость, проходящая через точки K , L и M , пересекает ребро BC в точке P .

а) Докажите, что $CP : PB = 9 : 1$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $MKLP$.

28В. В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Противоположные боковые рёбра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и MB проведена плоскость α , параллельная ребру MC .

а) Докажите, что сечение плоскостью α пирамиды $MABC$ является параллелограмм.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $MABC$ плоскостью α .

29В. В правильной треугольной усеченной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ площадь нижнего основания ABC в девять раз больше площади меньшего основания $A_1B_1C_1$. Через ребро AB проведена плоскость α , которая пересекает ребро CC_1 в точке N и делит пирамиду на два многогранника равного объёма.

а) Докажите, что точка N делит ребро CC_1 в отношении $5 : 13$, считая от вершины C_1 .

б) Найдите площадь сечения усеченной пирамиды плоскостью α , если высота этой пирамиды равна 13, а ребро меньшего основания равно 3.

30В. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 9, а боковое ребро SA равно $\sqrt{43}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 8$, $SK : KB = 7 : 3$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K .

а) Докажите, что плоскость α содержит точку C .

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α .

31В. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA равно 12, а сторона основания AB равна 6. В боковых гранях SAB и SAD провели биссектрисы AL и AM соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью ALM делит ребро SC пополам.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью ALM .

32В (ЕГЭ 2022). Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Точка M — середина SA , на ребре SB отмечена точка N так, что $SN : NB = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость CMN параллельна прямой SD .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью CMN , если все рёбра равны 12.

33В (ЕГЭ 2022). В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали пересекаются в точке O . Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO .

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α , если $SO = 9$, $AD = 12$, $BC = 10$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD .

34В (ЕГЭ 2022). В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M – середина ребра CC_1 . На рёбрах AB и A_1B_1 взяты точки K и N так, что $AK : KB = B_1N : NA_1$.

а) Докажите, что плоскость MKN перпендикулярна плоскости AA_1B_1 .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKN , если $AB = BB_1 = 42$ и $BK : KA = 41 : 1$.

35В (ЕГЭ 2023). В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 2$, а точка K – середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MKC делит ребро BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

36В (ЕГЭ 2023). Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является параллелограмм $ABCD$. На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно, причём $B_1 K : KC_1 = 1 : 2$, а $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

а) Докажите, что точка N – середина ребра BC .

б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 12, а её высота равна 2.

37В (ЕГЭ 2023). В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M является серединой ребра BB_1 , а точка N – середина ребра A_1C_1 . Плоскость α , параллельная прямым AM и B_1N , проходит через середину отрезка MN .

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину отрезка B_1M .

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α , если все рёбра призмы имеют длину 4.

ОТВЕТЫ

1В. $2\sqrt{5}$. 2В. $\frac{20}{3}$. 3В. $\frac{11\sqrt{3}}{2}$. 4В. 55. 5В. $4\sqrt{2}$. 6В. 104. 7В. 97,5. 8В. 90. 9В.

$3\sqrt{3}$. 10В. $8\sqrt{6}$. 11В. $\sqrt{5}$. 12В. $\sqrt{79}$. 13В. $\frac{3\sqrt{30}}{4}$. 14В. $3\sqrt{19}$. 15В. 1,5. 16В.

$8\sqrt{10}$. 17В. $\frac{39\sqrt{39}}{4}$. 18В. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 19В. $\frac{140}{3}$. 20В. $3\sqrt{195}$. 21В. 12. 22В. $\frac{80}{3}$. 23В.

$7\sqrt{6}$. 24В. 52. 25В. 3. 26В. $\frac{23\sqrt{219}}{4}$. 27В. $11\sqrt{5}$. 28В. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. 29В. 48,5. 30В.

$\frac{3\sqrt{73}}{5}$. 31В. 24. 32В. $15\sqrt{19}$. 33В. 49,5. 34В. $638\sqrt{3}$. 35В. $\frac{7\sqrt{10}}{6}$. 36В. $\frac{5\sqrt{37}}{6}$.

37В. $\frac{7\sqrt{6}}{2}$.